

**ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>** **B**

Δίνεται η εξίσωση  $2x^2 - 7x - 4 = 0$  (1)

α) Δείξτε ότι οι ρίζες της είναι οι :  $x_1 = -\frac{1}{2}$  και  $x_2 = 4$

β) Να λυθεί η ανίσωση  $2x^2 - 7x - 4 < 0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση  $2x^4 - 7x^2 - 4 = 0$

**ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>** **Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 4}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να απλοποιηθεί ο τύπος της.

γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$

δ) Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση  $y = ax + 2011$  όπου  $a = \frac{2}{3} \cdot f(0)$

Να βρεθεί η γωνία  $\omega$  που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα  $x'x$

**ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>** **Γ**

Δίνεται το τριώνυμο  $f(x) = x^2 - 2x + |\lambda - 1|$  με  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να δειχθεί ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι:  $\Delta = 4(1 - |\lambda - 1|)$

β) Για ποιες τιμές του  $\lambda$  η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μία ρίζα διπλή;

γ) Για ποιές τιμές του  $\lambda$  ισχύει  $f(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ ;

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>** **B**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{|x|}$

α. Να αποδείξετε ότι  $f(3) = \frac{4}{3}$

β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

γ. Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = 1$ .

**ΘΕΜΑ 5<sup>ο</sup>** **Γ**

α. Να λυθεί η ανίσωση:  $\frac{|x-2|-3}{5} + \frac{|2-x|}{2} < \frac{3|x-2|+1}{5}$

(\*β. Να λυθεί η ανίσωση:  $\frac{4x-x^3}{x^2+1} \geq 0$

γ. Να βρεθούν οι κοινές ακέραιες λύσεις των παραπάνω ανισώσεων

**ΘΕΜΑ 6<sup>ο</sup>** **Δ**

Δίνεται η εξίσωση  $\lambda(\lambda x - 1) + \lambda^2 = (3\lambda - 2)x$  όπου  $x$  ο άγνωστος και  $\lambda \in \mathbb{R}$

- Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  αν η εξίσωση έχει ως ρίζα τον αριθμό 2.
- Να λυθεί η εξίσωση για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$ .
- Αν η εξίσωση είναι αόριστη να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού  $\alpha$  ώστε να ισχύει:  $|(\alpha+1)^{3\lambda}| = 8$

**ΘΕΜΑ 7<sup>ο</sup>** **Β**

Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού  $x^2 + (\mu - 1)x + 1 = 0$  (1) όπου  $\mu \in \mathbb{R}$ .

B1. Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι  $\Delta = \mu^2 - 2\mu - 3$ .

B2. Να βρείτε τις τιμές του  $\mu$  για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες.

B3. Να βρείτε την τιμή του  $\mu$  ώστε το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης να είναι  $S = 4$ .

B4. Για  $\mu = -3$  να λύσετε την εξίσωση.

**ΘΕΜΑ 8<sup>ο</sup>** **Γ**

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = |x^2 - 4|$ .

Γ1. Με τη βοήθεια του τύπου της συνάρτησης να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα :

α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της  $f$  ;

β. Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) = 9$ .

**ΘΕΜΑ 9<sup>ο</sup>** **Β**

A) Να λυθεί η εξίσωση  $\frac{|\chi - 2| + 2}{2} = 7 - |\chi - 2|$

B) Να λυθεί η ανίσωση  $3|\chi - 1| - 4 \geq |\chi - 1|$

Γ) Δίνεται η εξίσωση της ευθείας  $\psi = (\kappa + \lambda)\chi - 2011$ , όπου  $\kappa, \lambda$  οι κοινές λύσεις των ερωτημάτων A) και B) με  $\kappa < \lambda$ . Τι είδους γωνία σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα  $\chi' \chi$ ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας

**ΘΕΜΑ 10<sup>ο</sup>** **Γ**

Δίνεται η παραβολή  $f(x) = \lambda x^2 - 2\kappa x + 3$  με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ , για την οποία έχουμε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον  $x'x$  στο σημείο  $A(1,0)$  και ότι διέρχεται από το σημείο  $B(-2,15)$ .

1. Αποδείξτε ότι για τους πραγματικούς  $\kappa, \lambda$  ισχύει:  $\begin{cases} \lambda - 2\kappa = -3 \\ 4\lambda + 4\kappa = 12 \end{cases}$ .

2. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης είναι  $f(x) = x^2 - 4x + 3$ .

3. Λύστε την εξίσωση  $\left| \frac{f(x)}{x^2 - x} \right| = 2$ .

**ΘΕΜΑ 11<sup>ο</sup>** **Β**

Δίνεται η εξίσωση  $|x^2 + x + 2| - |x|^2 = 2x^2 + 1$

B1. Να δείξετε ότι η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:  $2x^2 - x - 1 = 0$

B2. Να λυθεί η εξίσωση.

B3. Να κάνετε γινόμενο την παράσταση  $2x^2 - x - 1$

**ΘΕΜΑ 12<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{1-|1-2x|}}{x^2-1}$

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης.

Γ2. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Γ3. Να δείξετε ότι για  $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$  ισχύει:  $f(x)\sqrt{1-x} = -\frac{\sqrt{2}}{x+1}$

**ΘΕΜΑ 13<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - \lambda x + \mu = 0$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  και  $\mu < 0$

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες  $x_1, x_2$  οι οποίες είναι άνισες και ετερόσημες ( $x_1 < 0 < x_2$ ).

Δ2. Αν για τις ρίζες  $x_1, x_2$  της εξίσωσης ισχύει:  $x_1^2 + x_2^2 = 1 - 2x_1 \cdot x_2$  να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει ο πραγματικός αριθμός  $\lambda$ .

Δ3. Αν για τους  $\lambda, \mu$  ισχύει:  $\lambda^2 + \mu^2 + 5 \leq 2\lambda - 4\mu$

i. Να δείξετε ότι  $\lambda = 1, \mu = -2$

ii. Να λυθεί η εξίσωση

iii. Να λυθεί η ανίσωση:  $x + \frac{\mu}{x} < \lambda$

**ΘΕΜΑ 14<sup>ο</sup>**

Γ1) Να λύσετε την εξίσωση  $|2 - |2x - 1|| = 5$

Γ2) Να λύσετε την ανίσωση  $|8x^2 - 2012(x - 2011) + 1821| < -336$

Γ3) Να λύσετε την παραμετρική εξίσωση  $\frac{\lambda x - 1}{3} = \frac{3x + 1}{\lambda}$ , με  $\lambda \neq 0$  για τις διάφορες τιμές του

αριθμού  $\lambda$ .


**ΘΕΜΑ 15<sup>ο</sup>**

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$

Δ1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της με μορφή διαστημάτων.

Δ2) Να βρείτε τα σημεία τομής της συνάρτησης  $f$  με τον άξονα  $x'x$  και με τον άξονα  $y'y$ .


Δ3) Αφού απλοποιήσετε τον τύπο της παραπάνω συνάρτησης, να δικαιολογήσετε γιατί παριστάνει ευθεία γραμμή από την οποία εξαιρείται ένα σημείο. Ποιο είναι αυτό; Τι γωνία σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα  $x'x$ ;

**ΘΕΜΑ 16<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{\sqrt{2-|x-1|}}{x-1}$ .

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Γ2. Να βρείτε τα σημεία που η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .


**ΘΕΜΑ 17<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - 2x - \lambda = 0$ ,  $\lambda \in R$ .

Δ1. Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Δ2. Για  $\lambda = 4$ , να υπολογίσετε τις παραστάσεις:  $x_1 + x_2$  και  $x_1 \cdot x_2$ , όπου  $x_1, x_2$  οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης.

Δ3. Για  $\lambda = 4$ , να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = (1 + x_1)^{2012} \cdot (1 + x_2)^{2012}$ .

**ΘΕΜΑ 18<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - \alpha}{x - 3}$ .

A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

B. Αν  $6 \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) - 21 = 0$  να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in R$ .

Γ. Για  $\alpha = 9$

i. Να απλοποιηθεί ο τύπος της  $f(x)$ .

ii. Να λυθεί η ανίσωση  $|f(x)| < 4$ .

**ΘΕΜΑ 19<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{2-x} + \sqrt{x+2} + \alpha$ , όπου  $\alpha \in R$ .

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

B. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης περνάει από το σημείο  $K(2,2)$  να βρείτε τη τιμή του  $\alpha$ .

Γ. Για  $\alpha = 0$ ,

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης δεν τέμνει τον άξονα  $x'x$ .

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$K = (f(1))^2 - (f(-1))^2 + f(0)$$

**ΘΕΜΑ 20<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4-|x|}}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$

B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης  $P = \sqrt{(f(2)-1)^2} - \sqrt{(f(-2)-1)^2}$

Γ) Να βρείτε τα σημεία (εφ' όσον υπάρχουν) στα οποία η  $C_f$  τέμνει τους άξονες

Δ) Να αποδείξετε ότι το σημείο  $O(0,0)$  είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα σημεία  $A(-1, f(-1))$  και  $B(1, f(1))$

E) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{1}{x}$

Z) Να αποδείξετε ότι η  $C_f$  δεν έχει κοινά σημεία με τη διχοτόμο της  $2^{ns}$  και  $4^{ns}$  γωνίας των αξόνων.

**ΘΕΜΑ 21<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \lambda x^2 - (\lambda - 1)x - 1$  με  $\lambda \neq 0, 1$  και η συνάρτηση  $f(x) = |x_1|x - |x_2|$

όπου  $x_1, x_2$  οι λύσεις της εξίσωσης  $g(x) = 0$ .

1) Να βρεθούν οι λύσεις  $x_1, x_2$ .

2) Αν  $x_1 < x_2$  και  $\lambda \in (-1, 0)$ ,

α) Να λυθεί ως προς  $\lambda$  η εξίσωση  $f(0) = f(1)$


β) Να λυθεί ως προς  $\lambda$  η ανίσωση  $|f(0) \cdot f(1)| > 0$

γ) Να λυθεί η εξίσωση  $|f(x) + f(-x)| = g(1) + 4$ .

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $g$  και η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνονται σε δύο σημεία.

ε) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ( $\epsilon$ ):  $\psi = |x_1|x + |x_2|$

με τους άξονες  $x'x$  και  $\psi'\psi$ .


**ΘΕΜΑ 22<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{8 - |2 - x|}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

β. Να δείξετε ότι  $\frac{2}{f(2)} + \frac{1}{f(-4)} = \sqrt{2}$

γ. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $\psi'\psi$

**ΘΕΜΑ 27<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:  $f(x) = \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{x^2 - 1}$

α. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

β. Να δείξετε ότι ο αριθμοί  $f(x)$  και  $f(-x)$  είναι αντίθετοι.

γ. Αν  $f(a - 1) = 2012$ , να προσδιορίσετε την τιμή  $f(1 - a)$ .

**ΘΕΜΑ 28<sup>ο</sup>** 

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - (a + 1)x - a^2 = 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$  (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε τιμή του πραγματικού  $a$ .

β. Αν  $x_1, x_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), τότε:

i) Να βρείτε τις τιμές του  $a$  έτσι, ώστε  $|x_1 + x_2| \leq 2010$

ii) Αν  $a = 2$ , να βρείτε εξίσωση 2<sup>ου</sup> βαθμού που έχει ως ρίζες τους αριθμούς  $x_1 + 2$ ,  $x_2 + 2$

**ΘΕΜΑ 29<sup>ο</sup>** 


Δίνεται συνάρτηση  $f$  με 
$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 2}{|x^2 - 2x - 15| + ||x + 5| - 2|}$$

- Να εξετάσετε την  $f$  ως προς τη συμμετρία.
- Να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της  $C_f$  με τους άξονες
- Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η  $C_f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$

**ΘΕΜΑ 30<sup>ο</sup>** 

Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:  $f(x) = x^2 - (\lambda - 1)x + \lambda^2 - 2\lambda + 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει μόνο τον άξονα  $x'x$
- Να προσδιορίσετε τις τιμές του πραγματικού αριθμού  $\lambda$  ώστε η  $f$  να παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο με τετμημένη  $x = 2$

**ΘΕΜΑ 31<sup>ο</sup>** 

Δίνεται συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με:  $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda + 2)x + 8$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

- Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  η γραφική παράσταση της συνάρτησης έχει με  $x'x$  τουλάχιστον κοινό σημείο με σταθερή τετμημένη
- Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει δύο ομόσημες ρίζες
- Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  για τις οποίες η γραφική παράσταση της  $f$  εφάπτεται στην ευθεία  $y = 0$ .
- Αν  $\lambda \in \mathbb{R} - \{0, 2\}$  και  $B, \Gamma$  είναι τα σημεία τομής της  $C_f$  με τον  $x'x$  και  $A$  το σημείο τομής με τον  $yy'$  τότε:

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $E = \frac{8|\lambda - 2|}{|\lambda|}$

ii) Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες  $E = 24$