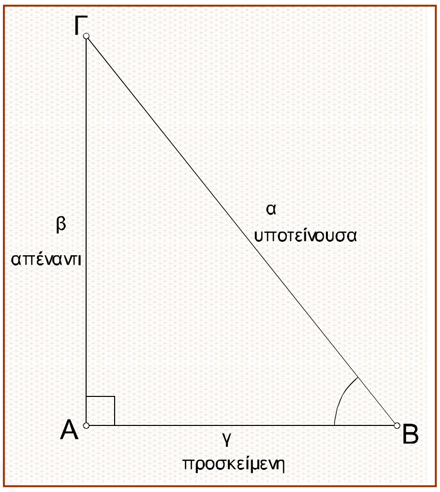
1η Ενότητα

▪ Τριγωνομετρικοί αριθμοί ▪ Τριγωνομετρικός κύκλος

❖ Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Έστω το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90^0$)

Τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας Β είναι το ημίτονο (ημΒ) , το συνημίτονο(συνΒ), η εφαπτομένη (εφΒ), και η συνεφαπτομένη (σφΒ) Είναι:



$$\etaμB = \frac{β}{α} \quad \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

$$συνB = \frac{γ}{α} \quad \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

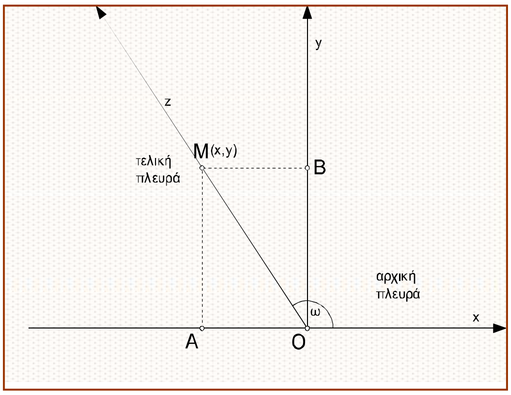
$$εφB = \frac{β}{γ} \quad \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}\right)$$

$$σφB = \frac{γ}{β} \quad \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}\right)$$

❖ Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας με $0^0 \le ω \le 360^0$

Η γωνία ω παράγεται από τον ημιάξονα Οx όταν περιστραφεί κατά τη θετική φορά , δηλαδή αντίθετα με τους δείκτες του ρολογιού.

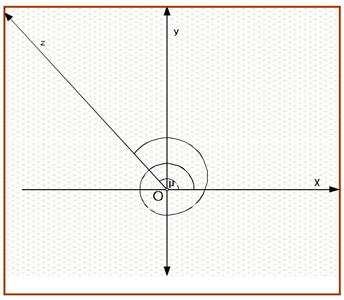
Αν Μ(x,y) είναι ένα σημείο ($M \neq O$) της τελικής πλευράς οποιασδήποτε γωνίας ω, ορίζουμε:



$$ημω = \frac{y}{ρ} \qquad συνω = \frac{x}{ρ}$$

$$εφω = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0 \qquad σφω = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

όπου $ρ = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$



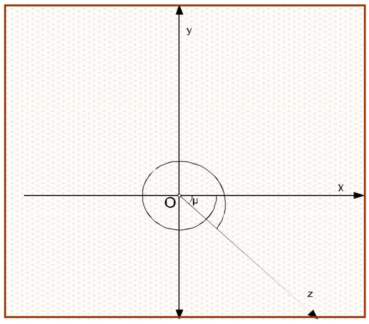
❖ Γωνίες μεγαλύτερες των 360^0 –Αρνητικές γωνίες

Αν ο ημιάξονας Οx κινούμενος κατά την θετική φορά διαγράψει ν ($ν \in \mathbb{N}$) πλήρεις στροφές και στη συνέχεια γωνία $μ^0$ λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία

$$ν\, 360^0 + μ^0$$

Αν ο ημιάξονας Οx κινούμενος κατά την αρνητική φορά διαγράψει ν ($\nu \in \mathbb{N}$) πλήρεις στροφές και στη συνέχεια γωνία μ^0 λέμε ότι έχει διαγράψει γωνία

$$\mathbf{-\nu\, 360^0 - \mu^0}$$



- Οι παραπάνω γωνίες , που είναι της μορφής $\kappa\, 360^0+\omega$, $\kappa \in \mathbb{Z}$,επειδή έχουν την ίδια τελική πλευρά με την γωνία ω θα έχουν και τους ίδιους τριγωνομετρικούς αριθμούς. Δηλαδή για κάθε $\kappa \in \mathbb{Z}$ ισχύει:

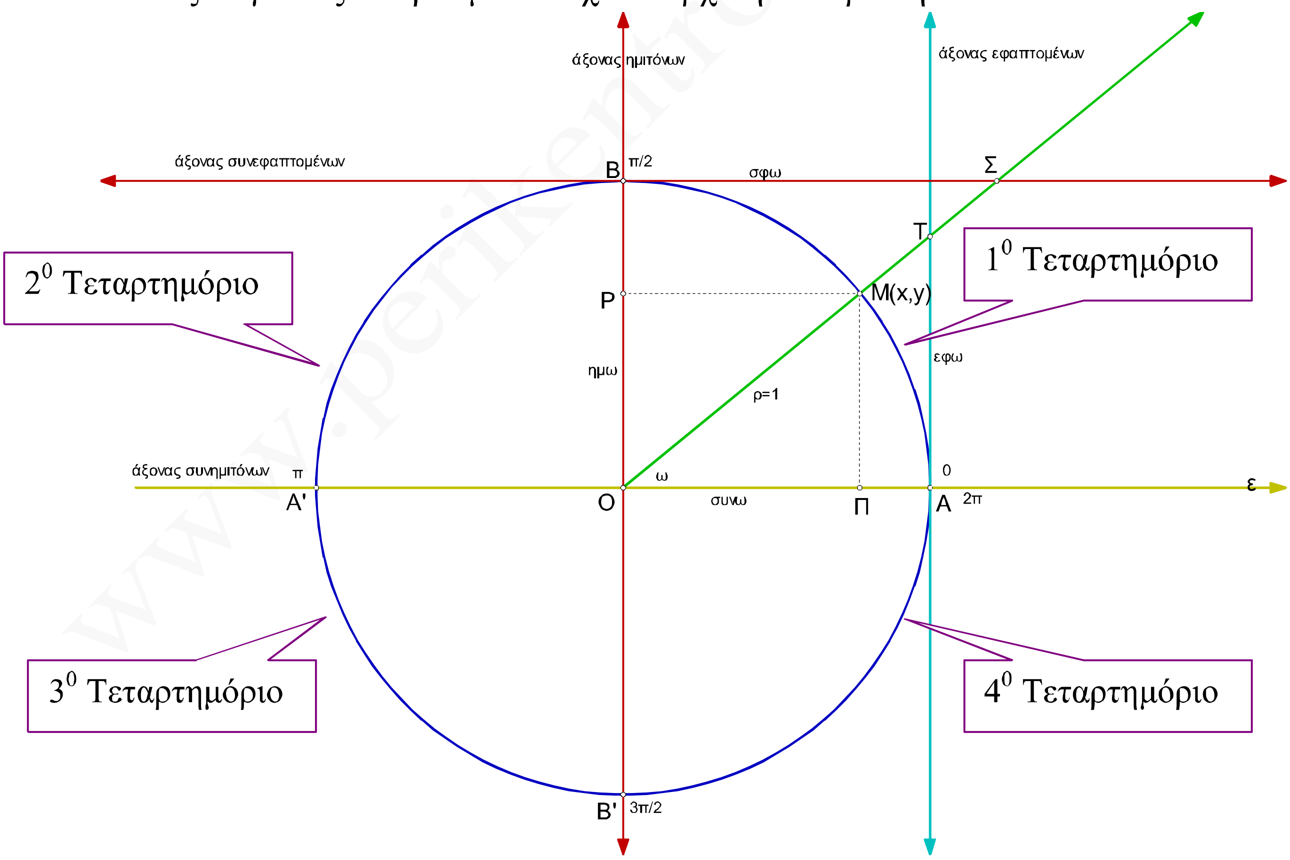
$$\eta\mu(\kappa\, 360^0+\omega)=\eta\mu\omega \qquad \varepsilon\varphi(\kappa\, 360^0+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\upsilon\nu(\kappa\, 360^0+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega \qquad \sigma\varphi(\kappa\, 360^0+\omega)=\sigma\varphi\omega$$

❖ Ο Τριγωνομετρικός Κύκλος

Ορισμός: Τριγωνομετρικό κύκλο λέμε τον κύκλο που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων Ο(0,0) και ακτίνα ρ=1

✓ Ολες οι γωνίες θεωρούμε ότι έχουν αρχική πλευρά την ΟΑ



- συνω=x=τετμημένη του σημείου Μ $\qquad$ εφω=y_T=τεταγμένη του σημείου Τ
- ημω=y=τεταγμένη του σημείου Μ $\qquad$ σφω=x_Σ=τετμημένη του σημείου Σ

- Το **συνω** ειναι η τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Το **ημω** ειναι η τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο.
- Η **εφω** είναι ίση με την τεταγμένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον άξονα των εφαπτομένων
- Η **σφω** ειναι ίση με την τετμημένη του σημείου τομής της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον άξονα των συνεφαπτομένων

❖ Εύρεση τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας γραφικά

Αν θέλουμε να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας ω τότε:

- ✓ Κατασκευάζουμε τον τριγωνομετρικό κύκλο
- ✓ Βρίσκουμε το σημείο τομής Μ της τελικής πλευράς της γωνίας ω με τον τριγωνομετρικό κύκλο
- ✓ Από το Μ φέρνουμε κάθετες στους άξονες τον ημιτόνων και συνημιτόνων. Η τεταγμένη και η τετμημένη των σημείων αυτών αντίστοιχα είναι το ημω και συνω .
- ✓ Ενώνουμε το σημείο Μ με το Ο και προεκτείνουμε κατά τμήμα ΟΜ προς το Μ ή προς το Ο ή προς το Ο και Μ ανάλογα σε ποιό τεταρτημόριο βρίσκεται το σημείο Μ . Η τεταγμένη και η τετμημένη των σημείων στα οποία η ευθεία ΟΜ τέμνει τους άξονες των εφαπτομένων και συνεφαπτομένων είναι αντίστοιχα η εφω και η σφω.

❖ Παρατήρηση 1:

Ισχύει: $-1 \leq \text{συνω} \leq 1$ και $-1 \leq \text{ημω} \leq 1$

❖ Παρατήρηση 2: Πρόσημο τριγωνομετρικών αριθμών

	Τεταρτημόρια			
	1^0	2^0	3^0	4^0
ημω	+	+	-	-
συνω	+	-	-	+
εφω	+	-	+	-
σφω	+	-	+	-
Μνημονικός κανόνας	Ο	Η	Ε	Σ

❖ Το ακτίνιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών

Το **ακτίνιο ή rad** είναι η γωνία που, όταν γίνει επίκεντρη κύκλου (Ο,ρ) βαίνει σε τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου αυτού δηλαδή σε τόξο ενός ακτινίου (ή 1 rad).

Αν έχουμε μια γωνία και είναι μ^0 και α rad τότε ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$$

❖ Πίνακας τριγωνομετρικών αριθμών

Γωνία ω		Τριγωνομετρικοί Αριθμοί			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0^0	0	$ημ0^0=0$	$συν0^0=1$	$εφ0^0=0$	$σφ0^0$=δεν ορίζεται
30^0	$\frac{π}{6}$	$ημ\frac{π}{6}=\frac{1}{2}$	$συν\frac{π}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$εφ\frac{π}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$σφ\frac{π}{6}=\sqrt{3}$
45^0	$\frac{π}{4}$	$ημ\frac{π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$συν\frac{π}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$εφ\frac{π}{4}=1$	$σφ\frac{π}{4}=1$
60^0	$\frac{π}{3}$	$ημ\frac{π}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$συν\frac{π}{3}=\frac{1}{2}$	$εφ\frac{π}{3}=\sqrt{3}$	$σφ\frac{π}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$
90^0	$\frac{π}{2}$	$ημ\frac{π}{2}=1$	$συν\frac{π}{2}=0$	$εφ\frac{π}{2}=$ δεν ορίζεται	$σφ\frac{π}{2}=0$
180^0	π	ημπ=0	συνπ =-1	εφπ=0	σφπ δεν ορίζεται
270^0	$\frac{3π}{2}$	$ημ\frac{3π}{2}=-1$	$συν\frac{3π}{2}=0$	$εφ\frac{3π}{2}$ Δεν ορίζεται	$σφ\frac{3π}{2}=0$

❖ Σχόλια:

1. Η **μέγιστη τιμή** των συνω , ημω είναι το 1

2. Η **ελάχιστη τιμή** των συνω , ημω είναι το -1.

3. το ημίτονο και το συνημίτονο της ίδιας γωνίας δεν παίρνουν συγχρόνως τις τιμές -1 , 0 , 1

4. Τα άρτια πολλαπλάσια του π : 0π ,$\pm$2π, $\pm$4π,…έχουν μορφή 2κπ,κ$\in$ Z

5. Τα περιττά πολλαπλάσια του π : $\pm$1π, $\pm$3π, 5π,…έχουν μορφή (2κ+1)π,κ$\in$ Z

6 Τα άρτια και τα περιττά πολλαπλάσια του π είναι τα πολλαπλάσια του π και έχουν τη μορφή λπ, λ$\in$ Z