Ασκήσεις - Πυθαγόρειο Θεώρημα

1. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΒΓ = 20 και ΑΓ = 12. Αν Δ το μέσο της ΒΓ και ΔΕ ⊥ ΒΓ (Ε σημείο της ΑΒ) τότε το μήκος της ΑΕ είναι:

   i) 3 ii) 3,5 iii) 4 iv) 4,5 v) 5

2. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Αν ΑΔ είναι το ύψος και ΑΜ η διάμεσος τότε να εξεταστεί αν ισχύουν τα παρακάτω:

   i) Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο

   ii) $M\Delta = 1/2\ B\Delta$

   iii) ΑΓ = 2ΑΔ

   iv) $A\Gamma^2 = 3AB^2$

   v) $A\Delta^2 + AM^2 = \frac{7}{16}B\Gamma^2$

3. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΑΒ = 5 και ΒΓ = 13. Αν ΑΔ είναι το ύψος του να υπολογισθούν τα ΒΔ, ΔΓ, ΑΔ.

4. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με ΑΒ = 13. Αν ΑΔ είναι το ύψος του και επιπλέον ΑΔ = 5 να υπολογισθούν τα ΑΓ, ΒΓ, ΒΔ, ΔΓ.

5. Να υπολογισθούν οι πλευρές ορθογώνιου τρίγωνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) αν γνωρίζουμε ότι έχουν μήκη $\alpha = 2x+3$, $\beta = 2x+2$, $\gamma = x$.

   (Απ: 5, 12, 13)

6. Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) έχει περίμετρο 40 και ΒΓ = 17. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρές του αν $\beta > \gamma$.

   (Απ: $\beta = 15$, $\gamma = 8$)

7. Τα μήκη των καθέτων πλευρών ορθογωνίου τρίγωνου ΑΒΓ είναι $\beta = 4\lambda$ και $\gamma = 3\lambda$. Να υπολογιστούν:

   i) Η υποτείνουσα

   ii) Οι προβολές των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα.

   iii) Το ύψος ΑΔ.

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Ν.δ.ο.

   i) Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΑΔ είναι όμοια.

   ii) ΑΒ ΑΓ = ΑΔ ΒΓ

   iii) $\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A\Gamma^2} = \frac{1}{A\Delta^2}$

Ασκήσεις - Πυθαγόρειο Θεώρημα

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 90^o$, α = 4 και β + γ = $\sqrt{18}$. Ν.δ.ο. βγ = 1.
2. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 2, ΑΓ = $2\sqrt{3}$. Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΔ = $\sqrt{3}$ ν.δ.ο. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) είναι ΑΒ = 2ΑΓ. Αν ΑΔ είναι το ύψος του ν.δ.ο. ΒΔ = 4ΓΔ.
4. Στη διαγώνιο ΒΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε τυχαίο σημείο Ο. Ν.δ.ο. $ΓΔ^2 – ΓΟ^2 = ΒΟ\ ΟΔ$.
5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η υποτείνουσα ΒΓ = 17 και η περίμετρος του με 40. Να βρεθούν οι κάθετες πλευρες. (Απ.: 8, 15)
6. Οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου είναι x, x + 1, x + 2. Να βρεθεί η περίμετρος
7. Αν υ το ύψος ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς α, ν.δ.ο. $3α^2 = 4υ^2$.
8. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) είναι ΑΒ = 50, ΓΔ = 14 και ΒΓ = ΑΔ = 30. Ν.δ.ο. οι διαγώνιες του τραπεζίου είναι κάθετες στις μη παράλληλες πλευρές.
9. Αν Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ ν.δ.ο. $ΗΒ^2 – ΗΓ^2 = ΑΒ^2 – ΑΓ^2$.
10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) φέρνουμε το ύψος ΑΔ και ισχύει $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = 3$. Ν.δ.ο. $\frac{ΒΔ}{ΔΓ} = 9$.
11. Τα μήκη των πλευρών τριγώνου είναι $\frac{α-β}{2}, \frac{α+β}{2}, \sqrt{αβ}$ όπου α > β > 0.
    i) Ποια είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου;
    ii) Ν.δ.ο. το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
12. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) ν.δ.ο.
    i) $α \cdot υ_α = β \cdot γ$ ii) $α + υ_α > β + γ$
13. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} < 90^o$ φέρνουμε το ύψος ΑΔ. Αν ισχύει $ΑΒ^2 = ΒΔ \cdot ΒΓ$ ν.δ.ο. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.
14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΔ και το Δ βρίσκεται μεταξύ των Β και Γ. Αν ισχύει $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$ ν.δ.ο. το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α.
15. Αν ΑΔ το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$), ν.δ.ο.:
    i) $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ \cdot ΒΓ$ ii) $\frac{1}{ΑΒ^2} + \frac{1}{ΑΓ^2} = \frac{1}{ΑΔ^2}$

Ασκήσεις – Γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος

1. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες, αν οι πλευρές του είναι ανάλογες των αριθμών:
   i) 12, 13, 14 (Απ.: οξυγώνιο)
   ii) 15, 8, 17 (Απ.: ορθογώνιο)
2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha = 12$, $\gamma = 5$. Μεταξύ ποιων τιμών μπορεί να κυμαίνεται η πλευρά β ώστε η γωνία $\hat{B}$ του τριγώνου να είναι οξεία;
3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 2ΒΓ φέρνουμε το ύψος ΒΕ. Ν.δ.ο.
   i) η γωνία $\hat{A}$ είναι οξεία
   ii) ΑΕ = 7ΕΓ
4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 12, ΑΓ = 28 και ΒΓ = 20.
   i) Να βρεθεί η γωνία $\hat{B}$. (Απ.: 120^o)
   ii) Η προβολή της ΑΓ στη ΒΓ.
   iii) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
5. Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι οξεία και οι πλευρές έχουν μήκη ΑΒ = 13, ΒΓ = 10, ΓΔ = 17 και ΔΑ = 15. Τι είδους γωνία είναι η $\hat{A}$; (Απ.: οξεία)
6. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του, αν οι πλευρές α, β, γ είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 5, 4 αντίστοιχα. Αν ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β ν.δ.ο. $ΑΔ = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{30}$.
7. Τα μήκη των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ είναι $\alpha = 7$, $\beta = 5$, $\gamma = 3$.
   i) Να προσδιοριστεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.
   ii) Να υπολογίσετε την γωνία του τριγώνου σε μοίρες που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά του.
   iii) Το εμβαδόν του τριγώνου.
8. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με ΑΒ = ΒΔ = ΒΓ = 14 και ΑΔ = ΔΓ = 8.
   i) Ν.δ.ο. η ΒΔ είναι μεσοκάθετος της ΑΓ.
   ii) Να υπολογίσετε το μήκος της ΑΓ.

Ασκήσεις – Θεωρήματα Διαμέσων

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha\ \mu_\alpha$. Ν.δ.ο. $\hat{A} = 90^o$.
2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α = 6, β = 7 και γ = 5. Φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ. Να βρεθεί το μήκος του ΔΜ. (Απ.: ΔΜ = 2)
3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α = 9, β = 7 και γ = 4. Να βρεθεί η διάμεσος ΑΜ.
4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α = 3, β = 5 και γ = 7. Ν.δ.ο. το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ πάνω στη ΒΓ είναι 4.
5. Να υπολογισθεί η γωνία Α τριγώνου ΑΒΓ αν ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 4\mu_\alpha^2$. (Απ.: $\hat{A} = 90^o$)
6. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 60^o$, β = 5 και γ = 3. Ν.δ.ο. $\mu_\alpha = \frac{7}{2}$.
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι β = 6, γ = 8 και $\mu_\alpha = 5$. Να βρεθεί η πλευρά α. (Απ.: α = 10)
8. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2$ ν.δ.ο. $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$.
9. Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαμέσων τριγώνου ΑΒΓ ν.δ.ο. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3(KA^2 + KB^2 + K\Gamma^2)$.
10. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\beta^2 + 2\alpha^2 = 4\mu_\beta^2$ ν.δ.ο. το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
11. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8\mu_\alpha^2$.
    - i) Να υπολογίσετε τη γωνία Α. (Απ.: $\hat{A} = 90^o$)
    - ii) Ν.δ.ο. $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$
12. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με β > α ν.δ.ο. η προβολή της μ_γ στη πλευρά γ είναι ίση με $\frac{2}{3}\frac{\mu_\alpha^2 - \mu_\beta^2}{\gamma}$.
13. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\alpha^2 = \beta\gamma$ και $\beta - \gamma = 5\sqrt{2}$. Να βρεθεί το μήκος της πλευράς α. (Απ.: α = 10)
14. Σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι έχουν μήκη $\mu_\alpha = 9$, $\mu_\beta = 12$ και $\mu_\gamma = 15$. Να υπολογίσετε την πλευρά γ του τριγώνου ΑΒΓ. (Απ.: γ = 10)
15. Ν.δ.ο. σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο μ_α ισχύει: $\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \frac{\alpha^2}{4} > \mu_\alpha^2 - \beta\gamma$.
16. Να υπολογισθούν οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου αν γνωρίζουμε ότι η μία είναι διπλάσια της άλλης και οι δύο πλευρές του έχουν μήκη 9 και 13.

(Απ.: $\delta_1 = 10$, $\delta_2 = 20$)

Ασκήσεις – Θεωρήματα Διαμέσων

1. Αν Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ ν.δ.ο. $ΑΒ^2 + 2ΚΓ^2 = ΑΓ^2 + 2ΚΒ^2$.
2. Έστω ΑΒ διάμετρος κύκλου, Γ και Δ σημεία αυτής που ισαπέχουν από το κέντρο του και Μ τυχαίο σημείο του κύκλου. Ν.δ.ο. $2(ΜΓ^2 + ΜΔ^2) = ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΓΔ^2$.
3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{Α} = 90^o$ και $\hat{Β} = 3\hat{Γ}$.
   i) Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ.
   ii) Αν ΑΗ είναι το ύψος και ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ ν.δ.ο. το τρίγωνο ΑΗΜ είναι ισοσκελές.
   iii) Ν.δ.ο. $β^2 – γ^2 = 2βγ$.
4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^o$) φέρνουμε τη διάμεσο ΒΕ.
   i) Ν.δ.ο. $ΒΕ^2 + \frac{3}{4}ΑΓ^2 = ΒΓ^2$
   ii) Αν ΑΔ είναι διάμεσος του ΑΒΓ με $Α\hat{Δ}Β = 60^o$ και $ΒΕ = \sqrt{14}$ να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του ΑΒΓ. (Απ. $γ = 2\sqrt{2}$, $α = 4\sqrt{2}$, $β = 2\sqrt{6}$)
5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^o$) φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και προς την ΑΜ στο σημείο Μ κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Σ. Ν.δ.ο. $ΣΒ^2 + ΣΓ^2 = 2ΣΑ^2$.
6. Στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε τα σημεία Δ και Ε, ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Ν.δ.ο. $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9}ΒΓ^2$.
7. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι β > γ. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ και Θ το βαρύκεντρο του τριγώνου ν.δ.ο. $β^2 – γ^2 = 3(ΘΓ^2 – ΘΒ^2)$.
8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Ν.δ.ο.
   i) $μ_β^2 + μ_γ^2 = 2μ_α^2$
   ii) $μ_α = \frac{\sqrt{3}}{2}α$, $μ_β = \frac{\sqrt{3}}{2}γ$ και $μ_γ = \frac{\sqrt{3}}{2}β$.
   iii) το τρίγωνο με πλευρές τις $μ_α$, $μ_β$, $μ_γ$ είναι όμοιο με το ΑΒΓ.
9. Εκατέρωθεν της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΔΒΓ και ΕΒΓ. Ν.δ.ο.
   i) $ΔΕ = α\sqrt{3}$
   ii) $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = α^2 + β^2 + γ^2$

Ασκήσεις – Μετρικές Σχέσεις στον Κύκλο

1. Από σημείο Σ εκτός κύκλου (O, R) φέρνουμε δύο τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ. Αν είναι ΑΒ = 9, ΔΓ = 5 και ΣΓ = 4
   - i) Να βρείτε το ΣΑ (Απ.: ΣΑ = 3)
   - ii) Αν ΣΕ εφαπτομένη, να βρείτε το μήκος της ΣΕ (Απ.: ΣΕ = 6)
   - iii) Αν R = $\sqrt{13}$ να βρείτε το μήκος ΣΟ (Απ.: ΣΟ = 7)
2. Δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται σ' ένα σημείο Σ εσωτερικό του κύκλου. Αν είναι ΓΔ = 26, ΣΑ = 10 και ΣΒ = 12 να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων ΣΓ και ΣΔ. (Απ.: 6 και 20)
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6 και ΑΓ = 9. Σημείο Δ της ΑΓ τέτοιο ώστε ΑΔ = 2. Ν.δ.ο. ο κύκλος που περνά από τα σημεία Β, Γ και Δ διχοτομεί την ΑΒ.
4. Δίνεται κύκλος (Ο, 8cm) και σημείο Ρ απέχει από το Ο 12cm. Τέμνουσα ΡΒΑ ορίζει στον κύκλο χορδή ΑΒ = 2cm. Ν.δ.ο. ΡΑ = 10.
5. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ τέμνονται στο Ο. Αν ΑΒ = 20, ΓΔ = 19, ΑΟ = 6 και ΓΟ = 7 ν.δ.ο. τα Α, Β, Γ, Δ είναι σημεία ομοκυκλικά.
6. Δύο κύκλοι έχουν κοινή χορδή ΒΓ. Αν Σ σημείο της προέκτασης ΒΓ ν.δ.ο. τα εφαπτόμενα τμήματα ΣΑ και ΣΔ είναι ίσα.
7. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Η ευθεία του ύψους ΑΔ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Αν ΑΒ = ΑΓ = 10 και ΒΓ = 12 ν.δ.ο.
   i) ΔΕ = 9/2 ii) R = 25/4
8. Στην προέκταση της διαμέτρου ΑΒ, προς το σημείο Β, ενός κύκλου με κέντρο Ο παίρνουμε σημείο Δ. Από το Δ φέρνουμε την εφαπτομένη ΔΓ του κύκλου. Αν ΑΓ = 2ΓΔ, ν.δ.ο. ΑΒ = 3ΒΔ.
9. Δίνονται οι ομόκεντροι κύκλοι (Ο, R) και (Ο, ρ) με R = 4 και ρ = 3. Από σημείο Μ που βρίσκεται εντός του (Ο, R) και εκτός του (Ο, ρ) φέρνουμε εφαπτομένη ΜΒ στον (Ο, ρ) που τέμνει τον (Ο, R) στα Α και Γ. Ν.δ.ο. $ΜΑ\ ΜΓ + ΜΒ^2 = 7$.
10. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και το μέσο Ε της ΒΓ. Αν Μ είναι η τομή της ΑΕ με τον κύκλο τότε ν.δ.ο. ο λόγος $\frac{ΑΕ}{ΕΜ}$ ισούται με 2.
11. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$). Γράφουμε κύκλο (Α, ΑΓ) ο οποίος τέμνει την ΒΓ στο Δ. Ν.δ.ο. $ΓΒ\ ΓΔ = 2ΓΑ^2$.
12. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$. Αν Θ το βαρύκεντρο του ΑΒΓ ν.δ.ο. ο κύκλος που περνά από τα Α, Β, Θ εφάπτεται της ΒΓ.

Ασκήσεις – Μετρικές Σχέσεις στον Κύκλο

1. Τα ύψη ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο σημείο Η. Ν.δ.ο.
   i) Τα τετράπλευρα ΑΖΗΕ, ΒΔΗΖ, ΓΕΗΔ, ΒΖΕΓ, ΑΖΔΓ και ΑΕΔΒ είναι εγγράψιμα.
   ii) ΗΑ ΗΔ = ΗΒ ΗΕ = ΗΓ ΗΖ
   iii) ΑΖ ΑΒ = ΑΓ ΑΕ
2. Δίνεται κύκλος (Κ, R). Από σημείο Α εξωτερικό του κύκλου φέρνουμε τέμνουσα ΑΒΓ τέτοια ώστε $A\hat{\Gamma}K = 60^o$. Αν ΑΚ = 14 και ΒΓ = 6 ν.δ.ο. ΑΒ = 10.
3. Από ένα σημείο Μ της κοινής εσωτερικής εφαπτομένης δύο κύκλων που εφάπτονται εξωτερικά φέρνουμε δύο τέμνουσες ΜΑΒ και ΜΓΔ. Ν.δ.ο. αν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ που ορίζονται στους δύο κύκλους είναι ίσες, τότε και τα συνολικά μήκη των τεμνουσών αυτών θα είναι ίσα.
4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και τη διχοτόμο ΑΔ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΜ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Ν.δ.ο. ΒΕ = ΓΖ.
5. Αν η διάμεσος ΑΜ ενός τριγώνου ΑΒΓ προεκτεινόμενη τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε, ν.δ.ο. $2AE\ AM = AB^2 + A\Gamma^2$.
6. Κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Αν το σημείο τομής Μ των διαγωνίων είναι μέσο της διαγωνίου ΒΔ ν.δ.ο.
   i) $\Delta B^2 = 4MA\ M\Gamma$
   ii) $AB^2 + B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta A^2 = 2A\Gamma^2$
7. Έστω ΑΒΓ οξυγώνιο τρίγωνο, ΑΔ και ΒΕ τα ύψη και Η το ορθόκεντρο. Ν.δ.ο.
   i) ΑΗ ΑΔ = ΑΕ ΑΓ
   ii) $2AH\ A\Delta = \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$
8. Έστω ΑΒ διάμετρος κύκλου (Ο, R) και Μ σημείο του κύκλου διαφορετικό των Α και Β. Από το Μ φέρνουμε κάθετη στη διάμετρο ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και τη διάμετρο στο σημείο Δ. Θεωρούμε τα σημείο Γ της διαμέτρου έτσι ώστε ΟΓ = ΟΔ. Αν η ΜΓ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε ν.δ.ο.
   i) $M\Delta^2 = A\Delta\ \Delta B$
   ii) $M\Gamma\ \Gamma E = M\Delta\ \Delta Z = R^2 - O\Delta^2$
   iii) $M\Gamma^2 + M\Delta^2 = 2(R^2 + O\Delta^2)$
   iv) $\dfrac{M\Gamma}{\Gamma E} + \dfrac{M\Delta}{\Delta Z} = 2\dfrac{R^2 + O\Delta^2}{R^2 - O\Delta^2}$ (Θέμα Εξετάσεων 2000)