ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΘΕΤΙΚΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Επιμέλεια : Αθανασιάδης Χαράλαμπος
Μαθηματικός

1. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Α. ΘΕΩΡΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

ΠΡΟΣΘΕΣΗ – ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Ζητείται να δειχθεί ισότητα αλγεβρικών αθροισμάτων διανυσμάτων. Τότε ξεκινάμε από το πιο πολύπλοκο μέλος και με βάση την υπόθεση καταλήγουμε στο πιο απλό ή εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της προς απόδειξη σχέσης μέσω σημείου αναφοράς και καταλήγουμε σε δύο ίσα μέλη.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 21, Άσκηση Α΄ 5.

2. Σε περίπτωση όπου ζητείται να δειχθεί ισότητα αλγεβρικών αθροισμάτων διανυσμάτων με πολλά διανύσματα, είναι προτιμότερο να εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της προς απόδειξη σχέσης μέσω σημείου αναφοράς. Αντικαθιστώντας στη σχέση θα καταλήγουμε στο ζητούμενο.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 21, Άσκηση Α΄ 7.

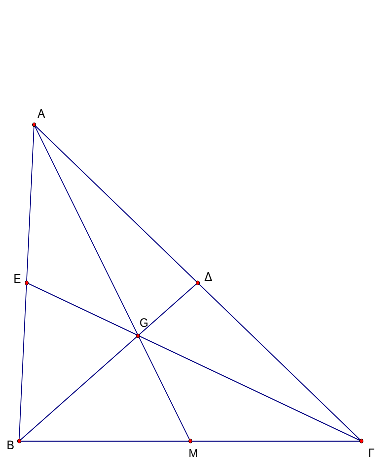
3. Εάν ζητείται να εκφρασθεί διάνυσμα $\vec{\alpha}$ συναρτήσει άλλων διανυσμάτων $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, … τότε με βάση την υπόθεση προσπαθούμε να γράψουμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, …

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 21, Άσκηση Α΄ 6.

ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΑΡΙΘΜΟΥ ΜΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ

1. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο σε διάνυσμα $\vec{\beta}$ τότε αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε να ισχύει : $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 27, Άσκηση Α΄ 11.



2. **Ιδιότητες Βαρύκεντρου :**

   α)

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AM},\quad \overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{B\Delta},\quad \overrightarrow{\Gamma G}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\Gamma E}$$

$$\overrightarrow{GM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AM},\quad \overrightarrow{G\Delta}=\frac{1}{3}\overrightarrow{B\Delta},\quad \overrightarrow{GE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Gamma E}$$

$\overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{G\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma G} = 2\overrightarrow{GE}$

β) Επιπλέον ισχύει ότι $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{G\Gamma} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{\Gamma G} = \vec{0}$ και για κάθε σημείο **Ο** του επιπέδου ισχύει ότι $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{O\Gamma})$.

(Είναι εφαρμογή του Σχολικού βιβλίου αλλά προτείνεται να μην διδαχθεί).

3. Ζητείται να δειχθεί ότι τρία σημεία του επιπέδου είναι συνευθειακά. Τότε δείχνουμε ότι δύο από τα τρία διανύσματα που σχηματίζουν αυτά τα σημεία είναι παράλληλα. (π.χ. Εάν Α, Β, Γ είναι τα σημεία δείχνουμε ότι $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Gamma} \parallel \overrightarrow{B\Gamma}$).

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 27, Άσκηση Α΄ 5.

4. Σε ασκήσεις με διανύσματα διαμέσων χρησιμοποιούμε τη σχέση που μας δίνει τη διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος εναλλάσσοντας κάθε φορά τα γράμματα των διανυσμάτων.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 27, Άσκηση Α΄ 7.

5. Εάν ζητείται να βρεθεί σημείο **Μ** του επιπέδου ώστε να ισχύει σχέση διανυσμάτων τότε προσπαθούμε να εκφράσουμε διάνυσμα με αρχή ή τέλος το σημείο **Μ** συναρτήσει γνωστών διανυσμάτων της υπόθεσης. Από τη σχέση αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε το σημείο **Μ**.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 28, Άσκηση Β΄ 5.

6. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι αλγεβρικό άθροισμα διανυσμάτων που περιέχουν τυχαίο σημείο **Μ** είναι σταθερό, τότε εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της υπόθεσης με σημείο αναφοράς οποιοδήποτε σταθερό σημείο και δείχνουμε ότι το ζητούμενο αλγεβρικό άθροισμα διανυσμάτων εξαρτάται μόνο από σταθερά διανύσματα (Ουσιαστικά προσπαθούμε να απαλείψουμε το σημείο **Μ**).

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 29, Άσκηση Β΄ 8.

7. **Βασική Ιδιότητα 1 :** Εάν $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου τέτοια ώστε $\lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} = \vec{0}$ τότε **λ=μ=0**. (Εάν χρησιμοποιηθεί τότε πρέπει να αποδειχθεί). Αυτή η ιδιότητα χρησιμοποιείται όταν θέλουμε να αποδείξουμε δοσμένη σχέση παραλληλίας διανυσμάτων. Καταλήγουμε σε γραμμικό συνδυασμό μη συγγραμμικών διανυσμάτων ίσο με το μηδενικό διάνυσμα και έτσι προσδιορίζουμε τους ζητούμενους συντελεστές.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 29, Άσκηση Β΄ 9.

8. **Βασική Ιδιότητα 2 :** Εάν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ τρία διανύσματα του επιπέδου, με $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά, τότε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ μπορεί να γραφεί, κατά μοναδικό τρόπο, ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ (π.χ. $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}$ με **λ, μ** μοναδικά). Μέσω αυτής της σχέσης μειώνουμε τον αριθμό των άγνωστων διανυσμάτων.

   Εφαρμογή : (Θα δοθεί παράδειγμα σε επόμενο μάθημα).

9. **Τριγωνική Ανισότητα στα Διανύσματα :**

   Γνωρίζουμε ότι ισχύει : $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$.

   Εάν ισχύει ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

   Εάν ισχύει ότι $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| = |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα.

   Εάν ισχύει ότι $\vec{\alpha}=\vec{0}$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ τότε η τριγωνική ανισότητα ισχύει πάντα ως ισότητα.

   Εφαρμογή : Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ τέτοια ώστε $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\beta}|=3|\vec{\alpha}|$, $|\vec{\gamma}|=4|\vec{\alpha}|$. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο του διανύσματος $\vec{\beta}$ και ότι το διάνυσμα $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε δύο διανύσματα με συντεταγμένες να είναι ίσα, τότε απαιτούμε να έχουν ίσες συντεταγμένες και επιλέγουμε την κοινή τιμή της παραμέτρου που ικανοποιεί και τις δύο ισότητες.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 39, Άσκηση Α΄ 4.

2. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ που δίνεται με συντεταγμένες να είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε απαιτούμε οι συντεταγμένες του να είναι ίσες με το μηδέν και επιλέγουμε την κοινή τιμή της παραμέτρου που ικανοποιεί και τις δύο ισότητες. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ που δίνεται με συντεταγμένες να

είναι παράλληλο στον άξονα $x'x$ τότε απαιτούμε η τεταγμένη του να είναι ίση με μηδέν και για να είναι παράλληλο στον άξονα $y'y$ απαιτούμε η τετμημένη του να είναι ίση με μηδέν.

Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 39, Άσκηση Α΄ 3.

3. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε τρία σημεία **Α, Β, Γ** με συντεταγμένες να είναι συνευθειακά, τότε σχηματίζουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ (ή τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ ή τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$) και απαιτούμε $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}) = 0$ (ή αντίστοιχα $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0$ ή $\det(\overrightarrow{A\Gamma}, \overrightarrow{B\Gamma}) = 0$).

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 38, Εφαρμογή.

4. Εάν ζητείται τιμή παραμέτρου ώστε δύο διανύσματα με συντεταγμένες να είναι παράλληλα, τότε απαιτούμε η ορίζουσά τους να είναι μηδέν. Εάν επιπλέον ζητείται να είναι ομόρροπα ή αντίρροπα, τότε για την τιμή της παραμέτρου που βρήκαμε ελέγχουμε εάν τα διανύσματα είναι ομόρροπα ή αντίρροπα.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 39, Άσκηση Α΄ 5.

5. Εάν ζητείται να βρεθεί σημείο **Μ** του επιπέδου που να ικανοποιεί δοσμένη σχέση με διανύσματα που δίνονται με συντεταγμένες, τότε θέτουμε ως **Μ** το σημείο $M(x, y)$ και από την υπόθεση καταλήγουμε σε σύστημα δύο εξισώσεων ως προς x, y.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 40, Άσκηση Α΄ 8.

6. Σε ασκήσεις όπου δίνονται μέσα διανυσμάτων ή ζητείται να βρεθεί μέσο διανύσματος (π.χ. κέντρο παραλληλογράμμου) θα χρησιμοποιούμε τις σχέσεις $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 40, Άσκηση Β΄ 1, Β΄ 2.

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

1. Ζητείται να βρεθεί εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων των οποίων δίνονται τα μέτρα και η γωνία τους. Τότε χρησιμοποιούμε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου. Εάν τα διανύσματα δίνονται με συντεταγμένες τότε χρησιμοποιούμε την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου.

   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 47, Άσκηση Α΄ 1, Α΄ 7.

2. Εάν ζητείται να βρεθεί γωνία δύο διανυσμάτων τότε βρίσκουμε το συνημίτονο της γωνίας μέσω του ορισμού του εσωτερικού γινομένου.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 47, Άσκηση Α΄ 7.
3. Εάν ζητείται να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε δείχνουμε ότι $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$. Εάν ζητείται να βρεθεί τιμή παραμέτρου ώστε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε απαιτούμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και προσδιορίζουμε την τιμή της παραμέτρου.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 47, Άσκηση Α΄ 9, Α΄ 5.
4. **Εύρεση Διανύσματος προβολής :** Γνωρίζουμε ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.
   Όμως $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}$. Άρα $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \lambda\vec{\alpha}^2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}$. Επομένως $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\beta}}{\vec{\alpha}^2}\vec{\alpha}$.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 46, Εφαρμογή 1.
5. **Ανάλυση Γνωστού Διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία είναι παράλληλη σε άλλο γνωστό διάνυσμα :**
   Έχουμε ότι : $\vec{\alpha} = \vec{\beta}_1 + \vec{\beta}_2$ με $\vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}_2$ και $\vec{\beta}_1 \parallel \vec{\gamma}$. Τότε θα ισχύει ότι $\vec{\beta}_1 = \lambda\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}_2 \perp \vec{\gamma}$. Άρα παίρνουμε ότι : $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\gamma} + \vec{\beta}_2$ με $\vec{\beta}_2 \perp \vec{\gamma}$. Πολλαπλασιάζουμε την ισότητα με το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ και έτσι έχουμε : $\vec{\alpha}\vec{\gamma} = \lambda\vec{\gamma}^2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{\vec{\gamma}^2}$. Άρα προκύπτει ότι $\vec{\beta}_1 = \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{\vec{\gamma}^2}\vec{\gamma}$ και $\vec{\beta}_2 = \vec{\alpha} - \dfrac{\vec{\alpha}\vec{\gamma}}{\vec{\gamma}^2}\vec{\gamma}$.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 46, Εφαρμογή 2.
6. Σε γεωμετρικές ασκήσεις με καθετότητες πλευρών θα χρησιμοποιούμε την ιδιότητα $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 50, Άσκηση Β΄ 10, Β΄ 11.
7. Εάν δίνεται γνωστός γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων ίσος με το μηδενικό διάνυσμα και ζητούνται εσωτερικά γινόμενα, τότε πολλαπλασιάζουμε το γραμμικό συνδυασμό με κάθε ένα από τα διανύσματα που τον αποτελούν. Έτσι σχηματίζεται ένα σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα εσωτερικά γινόμενα που μας ενδιαφέρουν.
   Εφαρμογή : Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 49, Άσκηση Β΄ 4.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

1. Εάν τυχαίο σημείο **Μ** ικανοποιεί ισότητα της μορφής $\overrightarrow{AM} = \lambda\vec{\alpha}$ όπου **Α** σταθερό γνωστό σημείο και $\vec{\alpha}$ γνωστό διάνυσμα, τότε το σημείο **Μ** ανήκει σε ευθεία που διέρχεται από το σημείο **Α** και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
2. Εάν τυχαίο σημείο **Μ** ικανοποιεί ισότητα της μορφής $|\overrightarrow{AM}| = \rho$ όπου **Α** σταθερό γνωστό σημείο και **ρ>0**, τότε το σημείο **Μ** κινείται σε κύκλο κέντρου **Α** και ακτίνας **ρ**.

   <u>Εφαρμογή :</u> Σχολικό Βιβλίο, Σελίδα 50, Άσκηση Γενικές 3.
3. Εάν τυχαίο σημείο **Μ** ικανοποιεί ισότητα της μορφής $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ όπου **Α** και **Β** σταθερά γνωστά σημεία, τότε το σημείο **Μ** ανήκει στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος **ΑΒ**.

   <u>Εφαρμογή :</u> Δίνονται τα σταθερά σημεία **Α** και **Β** του επιπέδου. Εάν το τυχαίο σημείο **Μ** που είναι διαφορετικό των **Α** και **Β**, ικανοποιεί τη σχέση $|\overrightarrow{AM}|^2 = |\overrightarrow{BM}|^2$ να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων **Μ**.

   <u>Εφαρμογή για το Β8 :</u> Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2,\ 1)$ και $\vec{\beta} = (1,\ -1)$. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{\gamma}$ συνεπίπεδο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για το οποίο ισχύουν τα ακόλουθα : i) $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$, ii) Σχηματίζει αμβλεία γωνία με το διάνυσμα $\vec{\beta}$ και iii) $|\vec{\gamma}| = |\vec{\alpha}|$.

Β. ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Δίνεται το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το μέσο του Μ. Να δειχθεί ότι για την διανυσματική ακτίνα του Μ ισχύει ότι : $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.
2. Να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
3. Για δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ να δειχθεί ότι $\vec{\alpha}\vec{\beta} = \vec{\alpha}\,\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.
4. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.
5. Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow$ υπάρχει $\lambda \in \Re$ τέτοιο ώστε $\vec{\alpha} = \lambda\vec{\beta}$.
6. Εάν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που σχηματίζουν γωνία θ, να αποδείξετε ότι: **συνθ=** $\dfrac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$.
7. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λανθασμένες :

α) Εάν $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \omega$ και $(\vec{\gamma}, \vec{\beta}) = \varphi$ με **συνφ+συνω=2** τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα.

β) Δύο αντίθετα διανύσματα έχουν τον ίδιο συντελεστή διευθύνσεως.

γ) Εάν $\lambda\vec{\alpha} = \mu\vec{\alpha}$ τότε **λ=μ**.

δ) Για δύο τυχαία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι : $(\vec{\alpha}\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$.

ε) Εάν $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| + |\vec{\beta}|$ τότε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα.

στ) Εάν $|\vec{\alpha}| = \sqrt{3}$, $|\vec{\beta}| = 1$ **και** $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \dfrac{\pi}{6}$, τότε $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 1$.

ζ) Για δύο τυχαία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι : $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} \,//\, \vec{\alpha}$.

η) Εάν $\vec{\beta} \neq \vec{0}$ τότε $\dfrac{\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}^2\cdot\vec{\gamma})}{\vec{\beta}^2} = \vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}$.

θ) Για δύο τυχαία μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει ότι : $|\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}| \leq |\vec{\alpha}|\cdot|\vec{\beta}|$.

ι) Εάν $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = 0$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$.

ια) Εάν **det** $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $\vec{\alpha} \,//\, \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$.

8. Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της Στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της Στήλης Β που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στήλη Α	**Στήλη Β**
α. κάθετα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	1. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \lvert\vec{\alpha}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$
β. ομόρροπα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	2. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -\lvert\vec{\alpha}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$
γ. αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$	3. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$
	4. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2\,\lvert\vec{\alpha}\rvert \cdot \lvert\vec{\beta}\rvert$

9. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(\lambda,2)$ και $\vec{\beta}=(2,\lambda)$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Εάν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι κάθετα, τότε : **α. λ=1 β. λ=0 γ. λ=–2 δ. λ=2**

β) Εάν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα, τότε : **α. λ=1 β.λ=0 γ.λ=–2 δ. λ=2**

γ) Εάν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα, τότε : **α. λ=–1 β.λ=0 γ.λ=–2 δ.λ=2**

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $\lvert\vec{\alpha}\rvert = \sqrt{3}$ και $\lvert\vec{\beta}\rvert = 1$. Εάν $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta} = \frac{1}{2}\vec{\alpha}$ τότε η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ίση με : **α. π/6** **β. π/3** **γ. π/4** **δ. π**

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Έστω ευθεία **(ε)** διάνυσμα $\vec{AB}$ πάνω σε αυτήν με $\lvert\vec{AB}\rvert=1$ και σημείο **Μ** εκτός της ευθείας. Εάν **Μ'** το συμμετρικό του **Μ** ως προς την ευθεία να δειχθεί ότι $\vec{AM'} = 2(\vec{AM}\vec{AB})\vec{AB} - \vec{AM}$.
2. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** και τα σημεία **Δ** και **Ε** στις πλευρές **ΑΒ** και **ΑΓ** αντίστοιχα για τα οποία ισχύει ότι $\vec{A\Delta} = \frac{1}{3}\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma E} = \frac{1}{3}\vec{\Gamma A}$. Εάν **Κ** και **Λ** είναι τα μέσα των πλευρών **ΑΒ** και **ΔΕ** αντίστοιχα να δειχθεί ότι $\vec{K\Lambda} \,//\, \vec{B\Gamma}$.
3. Δίνεται ένα τρίγωνο **ΑΒΓ** και το μέσο **Ο** της πλευράς του **ΒΓ**.

α) Να βρεθούν τα σημεία **Μ** και **Ν** για τα οποία ισχύουν : $2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{\Gamma M} = \vec{0}$ και $\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{BN} + 2\overrightarrow{N\Gamma} = \vec{0}$.

β) Να δειχθεί ότι τα σημεία **Α**, **Μ** και **Ν** είναι συνευθειακά.

γ) Να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AN}$ είναι συγγραμμικά.

4. Δίνονται τα σταθερά σημεία **Α**, **Β**, **Γ** και το μεταβλητό σημείο **Μ**. Να αποδειχθεί ότι το διάνυσμα $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

5. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ**, το μέσο **Μ** της **ΒΓ** και σημείο **Ρ** τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{PM}$. Εάν **Ν** το μέσο της **ΑΓ** να δειχθεί ότι τα σημεία **Β**, **Ρ** και **Ν** είναι συνευθειακά.

6. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ μη συγγραμμικά ανά δύο και τέτοια ώστε $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} + \vec{\gamma}$ και $\vec{\beta} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\gamma}$. Να δειχθεί ότι $\vec{\gamma} \parallel \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

7. Εάν τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\lambda, 2)$ και $\vec{\beta} = (50, \lambda)$ είναι παράλληλα, τότε :

α) Να βρεθούν οι τιμές του **λ**.

β) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου $M(x,\ x+1)$ όταν τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα και ισχύει ότι $\overrightarrow{OM} \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

8. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{x}$ του επιπέδου ισχύουν : $\vec{x} + 2\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$, $(\vec{x} + \vec{\beta}) \perp \vec{\alpha}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \pi / 4$.

α) Να εκφρασθεί το διάνυσμα $\vec{x}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να υπολογισθεί το $|\vec{x} + \vec{\alpha}|$.

9. Δίνονται τα σημεία **Α**, **Β**, **Γ**, **Ο** τέτοια ώστε $3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 4\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$.

α) Να δειχθεί ότι τα σημεία **Α**, **Β** και **Γ** είναι συνευθειακά.

β) Εάν για το μεταβλητό σημείο Μ ισχύει ότι : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{\Gamma B} + 4\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{\Gamma A} = 0$ να βρεθεί η γραμμή που γράφουν τα σημεία **Μ**.

10. Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει ότι $(\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}) \perp (\lambda\vec{\alpha} - \kappa\vec{\beta})$ για κάθε $\kappa, \lambda \in \mathfrak{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

β) Εάν $|\vec{\beta}| = \sqrt{2}$ να βρεθεί το $|\vec{\alpha}|$.

11. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-6, 8)$.

α) Να βρεθεί το μέτρο και ο συντελεστής διευθύνσεώς του.

β) Να εκφρασθεί το $\vec{\alpha}$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{u} = (2, 3)$ και $\vec{v} = (1, 2)$.

γ) Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\vec{\beta}$ αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ και με μέτρο τριπλάσιο από το μέτρο του $\vec{\alpha}$.

12. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύουν : $\vec{\alpha} - 8\vec{\gamma} + 3\vec{\beta} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\gamma}| = 1,\ |\vec{\beta}| = \sqrt{7}$.

α) Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

β) Εάν θεωρήσουμε ότι $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}, \overrightarrow{OB} = \vec{\beta}, \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{\gamma}$ και $\overrightarrow{O\Delta} = 2\overrightarrow{O\Gamma}$ όπου **Ο** τυχαίο σημείο του επιπέδου να δειχθεί ότι τα σημεία **Α**, **Β**, **Δ** είναι συνευθειακά.

13. Εάν $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (8, 6)$ να βρεθεί το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{\beta}}\vec{\alpha}$.

14. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha},\ \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta},\ (\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3},\ |\vec{\alpha}| = 3$ και $|\vec{\beta}| = 4$. Έστω **Κ**, **Μ** τα μέσα των **ΑΒ** και **ΒΓ** αντίστοιχα. Από το **Μ** φέρνουμε την κάθετο **ΜΛ** στην **ΚΜ** που τέμνει την **ΑΓ** στο **Λ** και έστω **λ** ο πραγματικός για τον οποίο ισχύει : $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = \lambda \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.

α) Να εκφρασθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{KM}$ συναρτήσει του $\vec{\beta}$ και το $\overrightarrow{M\Lambda}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \lambda$.

β) Να δειχθεί ότι $\overrightarrow{\Gamma\Lambda} = -\frac{5}{16}\overrightarrow{A\Gamma}$.

15. Δίνεται παραλληλόγραμμο **ΑΒΓΔ** και σημεία **Ε**, **Ζ** τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Delta Z} = \beta\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ με $\alpha+\beta=1$. Να δειχθεί ότι η ευθεία **ΕΖ** διέρχεται από το κέντρο **Ο** του παραλληλογράμμου.

16. Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός **κ**, ώστε τα διανύσματα $\kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.

17. Δίνεται τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$, $\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right| = 4$ και $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}\right) = \dfrac{\pi}{3}$. Εάν **Κ** σημείο της πλευράς **ΒΓ** τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{\Gamma K}$ να βρεθεί το $\left|\overrightarrow{AK}\right|$.

18. Δίνονται τα σημεία **Α(4, 0)** και **Β(0, 5)** στο ορθοκανονικό σύστημα **Oxy**.

α) Να βρεθεί σημείο **Μ** του τμήματος **ΑΒ** τέτοιο ώστε $\overrightarrow{OM} \perp \overrightarrow{AB}$.

β) Εάν **Κ** το μέσο του $\overrightarrow{OA}$ και **Λ** το μέσο του $\overrightarrow{OB}$ τότε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{MK}\overrightarrow{M\Lambda}$ είναι ίσο με : **Α. 1** **Β.** $\overrightarrow{MO}^2$ **Γ.** $\overrightarrow{MK}^2$ **Δ. 0**

19. Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| + \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 2$ να δειχθεί ότι $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| - \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 2\vec{\alpha}\vec{\beta}$.

20. Έστω το κυρτό τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** με $\overrightarrow{AB} = (1,\ 2)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (0,\ 5)$ και $\overrightarrow{B\Delta} = (-2,\ 1)$.

α) Να δειχθεί ότι το **ΑΒΓΔ** είναι παραλληλόγραμμο και να βρεθούν οι γωνίες του.

β) Εάν **Μ** τυχαίο σημείο να δειχθεί ότι η διαφορά $\overrightarrow{MA}\overrightarrow{M\Gamma} - \overrightarrow{MB}\overrightarrow{M\Delta}$ είναι σταθερή ποσότητα.

21. Εάν $\left|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\right| = 2\left|\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right| = 4\left|\vec{\gamma}-\vec{\alpha}\right|$ να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} = \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

22. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \left(\left|\vec{\beta}\right| - \kappa,\ \lambda\right)$ και $\vec{\beta} = \left(\kappa,\ \left|\vec{\alpha}\right| - \lambda\right)$.

α) Να βρεθεί το $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

β) Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

23. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Να λυθεί η εξίσωση $\left|\vec{x}-\vec{\alpha}\right|\vec{x} = \left|\vec{x}+8\vec{\alpha}\right|\vec{\alpha}$.

24. Εάν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι $\left|\vec{\alpha}\right| = \rho$, $\left|\vec{\beta}\right| = 3\rho - 4$ και $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \rho^2$ να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός **ρ** και να εξετασθεί εάν $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.