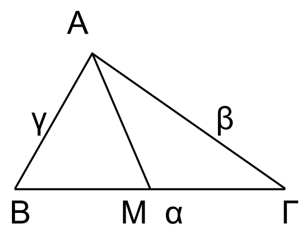
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9ο

ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΔΙΑΜΕΣΩΝ

1ο Θεώρημα διαμέσου

Σε κάθε τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της περιεχόμενης διαμέσου, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

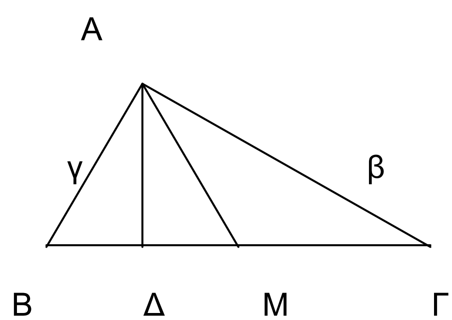
$\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\dfrac{\alpha^2}{2}$



2ο Θεώρημα διαμέσου

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου είναι ίση με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω σ' αυτή.

$\beta^2-\gamma^2=2\alpha\text{ΜΔ}$



Παρατήρηση:

Απ' το 1ο θεώρημα διαμέσου και λύνοντας τον τύπο ως προς τις διαμέσους έχουμε τις σχέσεις που δίνουν το μήκος της διαμέσου συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου.

$$\mu_\alpha^2=\frac{2\beta^2+2\gamma^2-\alpha^2}{4} \qquad \mu_\beta^2=\frac{2\alpha^2+2\gamma^2-\beta^2}{4} \qquad \mu_\gamma^2=\frac{2\alpha^2+2\beta^2-\gamma^2}{4}$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 = \gamma^2 + \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$

Σ Λ

2. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος μ_γ είναι κάθετη στην πλευρά ΒΓ και ίση με την πλευρά ΒΓ τότε ισχύει: $\beta^2=5\alpha^2$ Σ Λ

3. Η σχέση $\upsilon = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ που συνδέει το ύψος υ με την πλευρά α ισόπλευρου τριγώνου μπορεί να αποδειχθεί και από το θεώρημα διαμέσων

Σ Λ

4. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $\mu_\alpha^2 = \beta \cdot \gamma$ και $\beta - \gamma = 5\sqrt{2}$ Το μήκος της πλευράς α είναι:

Α. 5 Β. 10 Γ. 15 Δ. $5\sqrt{3}$ Ε. $3\sqrt{5}$

5. Αν σε ένα τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών είναι ίσο με το τετραπλάσιο του τετραγώνου της περιεχόμενης διαμέσου, τότε το τρίγωνο είναι:

Α. αμβλυγώνιο Β. ισοσκελές Γ. ισόπλευρο Δ. ορθογώνιο

6. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ οι πλευρές β και γ έχουν μήκη 6 και 8 αντίστοιχα, τότε η διάμεσος ΑΜ μπορεί να πάρει όλες τις τιμές του διαστήματος και μόνο αυτές.

Α. (1,7) Β. (0,7) Γ. (6,8) Δ. $\left(\frac{6}{8}, \frac{8}{6}\right)$

7. Αν ένα τρίγωνο έχει α=6, β=7, γ=5 τότε η προβολή της διαμέσου ΑΜ στην ΒΓ έχει μήκος:

Α. 2 Β. 2,5 Γ. 3 Δ. 4 Ε. 6

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=8cm, β=4cm, και γ=6cm. Τότε το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις διάμεσούς του είναι :

α) οξυγώνιο β) ορθογώνιο
γ) αμβλυγώνιο δ) δεν σχηματίζεται τρίγωνο

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Α΄ΟΜΑΔΑΣ

1. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε α=8, β=10 και γ=12

α) Να υπολογιστούν τα μήκη των διαμέσων μ_α, μ_β και μ_γ

β) Να υπολογιστεί το μήκος της προβολής της διαμέσου μ_α στη ΒΓ

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΓ = 3, ΒΓ = 8 και Γ = 60°. Να υπολογίσετε τα μήκη της πλευράς ΑΒ και της διαμέσου ΑΜ.

(απ. ΑΒ=7, ΑΜ=$\sqrt{13}$)

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=10, ΒΓ=14 και ΑΓ=12.

ι) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου.

ιι) Να υπολογιστεί η διάμεσος ΒΜ.

ιιι) Να υπολογιστεί η προβολή της διαμέσου ΒΜ στην ΒΓ.

4. Δίνεται κύκλος (Ο,κ) και δύο διάμετροί του ΑΒ και ΓΔ. Έστω Μ σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε ΑΜ = 15, ΒΜ = 20 και ΓΜ = 24. Να βρεθεί το μήκος του ΔΜ. *(απ. ΔΜ=7)*

5. Αν Η το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ με ΑΓ>ΑΒ, να αποδειχθεί ότι :

$ΗΓ^2-ΗΒ^2=ΑΓ^2-ΑΒ^2$.

6. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι: $ΑΔ^2 = ΑΓ^2 + 2ΒΓ^2$.

7. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90°$ και το G είναι το κέντρο βάρους του. Να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 8\mu_\alpha^2$

ii. $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 5\mu_\alpha^2$

iii. $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{2}\alpha^2$

iv. $GA^2 + GB^2 + GΓ^2 = \frac{2}{3}\alpha^2$

8. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $\mu_\alpha = \frac{3a}{2}$. Να αποδειχθεί ότι $\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$

9. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι β>γ και $\mu_a^2 = \beta \cdot \gamma$ να δειχθεί ότι α=(β-γ)$\sqrt{2}$.

10. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $\beta^2+\gamma^2=2\alpha \cdot \mu_\alpha$. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

11. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ = μ_α. Αν ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha{}^2 - \beta\gamma = \frac{\alpha^2}{2}$

α. να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$,

β. να υπολογιστεί η γωνία $\hat{A}$**.**

12. Θεωρούμε το τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ. Παίρνουμε το μέσο Λ του ΒΜ και το μέσο Ν του ΜΓ. Αν είναι ΑΒ = γ, ΑΓ = β, ΒΓ = α, ΑΛ = ν και ΑΝ = λ, να αποδείξετε ότι: $\beta^2 + \gamma^2 = \nu^2 + \lambda^2 + \frac{3\alpha^2}{8}$.

13. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και σημεία Δ και Ε πάνω στην ΑΓ τέτοια ώστε ΑΔ=ΔΕ=ΕΓ. Να δειχθεί ότι $Β Δ^2+ΒΕ^2=ΒΓ^2+5ΔΕ^2$

14. Διαιρούμε την υποτείνουσα ΒΓ = α ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ σε τρία ίσα τμήματα ΓΔ = ΔΕ = ΕΒ και φέρνουμε τις ΑΔ και ΑΕ. Να δείξετε ότι:

$$ΑΔ^2 + ΑΕ^2 + ΔΕ^2 = \frac{2}{3} ΒΓ^2$$

15. Με εφαρμογή του θεωρήματος των διαμέσων στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) να αποδείξετε ότι: $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$.

16. Με εφαρμογή του θεωρήματος των διαμέσων στο ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α να αποδείξετε ότι το ύψος του ισούται με $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

17. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=5, ΑΓ=7 και ΒΓ=6.

ι) Να βρεθεί το είδος του τριγώνου.

ιι) Να υπολογιστεί η διάμεσος ΒΜ.

ιιι) Να υπολογιστεί η προβολή της διαμέσου ΒΜ στην ΑΓ.

ιv) Να υπολογιστεί το ύψος ΒΔ.

v) Να υπολογιστεί το ύψος ΑΗ.

vι) Να υπολογιστεί η προβολή της ΒΜ στην ΑΒ.

18. Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ=6, ΒΓ=12 και ΓΑ=8.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο.

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

19. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=2, β=$\sqrt{7}$ και γ=1.

i. Να βρείτε το είδος του τριγώνου
ii. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς α πάνω στη γ.
iii. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ.
iv. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Β΄ΟΜΑΔΑΣ

20. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) του οποίου οι πλευρές είναι ΑΒ=12, ΒΓ=8, ΓΔ=6 και ΑΔ=4. Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, να υπολογιστεί το μήκος του ΜΝ.

21. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε πάνω στη βάση του ΒΓ τα σημεία Δ και Ε ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ. Να δείξετε ότι: $ΑΒ^2 + 2ΑΓ^2 = 3ΑΕ^2 + 6ΔΕ^2$.

22. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°). Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και προς την ΑΜ στο σημείο Μ κάθετη ευθεία που τέμνει την ΑΓ στο Σ. Να αποδείξετε ότι:

$$ΣΒ^2 + ΣΓ^2 = 2ΣΑ^2.$$

23. Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο, Ε και Ζ τα μέσα των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα.

Αποδείξτε ότι: $AE^2+AZ^2=\frac{9A\Gamma^2+B\Delta^2}{8}$

24. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και Θ, Η τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Κ το μέσο της ΘΗ, να δειχθεί ότι: $\beta^2-\gamma^2=2(K\Gamma^2-KB^2)$.

25. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $A\Gamma^2+B\Delta^2=2(KM^2+\Lambda N^2)$.

26. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ και στην προέκταση της μεγαλύτερης διαγωνίου του ΑΓ, προς το Α παίρνουμε σημείο Μ. Δείξτε ότι ΜΑ ΜΓ= $M\Delta^2-A\Delta^2$

27. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τη διάμεσο του ΑΔ και σημείο Ε της ΒΓ, τέτοιο ώστε $\Gamma E=\frac{B\Gamma}{2}$. Να αποδειχθεί ότι $AE^2-AB^2=3(A\Gamma^2-A\Delta^2)$.

28. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε σημείο Ε, ώστε $\Gamma E = \frac{\alpha}{2}$. Να αποδείξετε ότι: $AE^2 = 3\beta^2 + \gamma^2 - 3\mu_\alpha^2$.

29. Αν ΒΒ' το ύψος τριγώνου ΑΒΓ με γωνΑ<90^o και ΑΜ η διάμεσος του, τότε να αποδειχθεί ότι $AM^2=\frac{B\Gamma^2}{4}+A\Gamma\cdot AB'$

30. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($A=90^o$) με $B=3\Gamma$. Φέρνουμε το ύψος ΑΗ και την διάμεσο ΑΜ. Να δειχθεί ότι:

i) ΑΗ=ΜΗ

ii) $A\Gamma^2-AB^2=2A\Gamma\cdot AB$

31. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\alpha=5$, $\mu_\beta=4$ και $\mu_\gamma=3$. Να υπολογίσετε τα α, β, γ και το είδος του τριγώνου ΑΒΓ.

(απ.οξυγώνιο)

32. Αν σ΄ ένα τρίγωνο ισχύει $\mu_\alpha<\mu_\beta<\mu_\gamma$ να βάλετε κατά σειρά μεγέθους τις πλευρές α,β,γ

33. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $3\alpha^2+2\gamma^2=2\beta^2$

Α)Να βρεθεί το είδος του τριγώνου

Β)Να βρεθεί η προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ

34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 2γ και ΑΜ=$\mu_{\alpha}=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$.

i. Να αποδείξετε ότι : $\beta=\gamma\sqrt{7}$

ii. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

iii. Αν ΒΔ το ύψος του τριγώνου , να δείξετε ότι : $ΑΔ=\frac{2\gamma\sqrt{7}}{7}$

35. Έστω το τρίγωνο $ΑΒΓ$ στο οποίο ισχύει:

$$\mu_{\beta}=\frac{\gamma}{2}$$

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΑΒΓ$ είναι αμβλυγώνιο

β) Να δείξετε ότι $\upsilon_{\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{4\gamma^2-\alpha^2}$.

36. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ οι διάμεσοι μ_β και μ_γ τέμνονται κάθετα, να δείξετε ότι: $\beta^2+\gamma^2=5\alpha^2$.

37. Έστω Θ το βαρύκεντρο τριγώνου ΑΒΓ και $\widehat{ΒΘΓ}=60^{\circ}$.

Να δείξετε ότι : $\mu_{\beta}\cdot\mu_{\gamma}=\frac{\beta^2+\gamma^2-5\alpha^2}{4}$.

38. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του οποίου συνδέονται με τη σχέση $\beta^2+\gamma^2=2\alpha^2$. Να αποδειχθεί ότι:

α) $\mu_{\beta}^2+\mu_{\gamma}^2=2\mu_{\alpha}^2$

β) $\mu_\alpha=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$, $\mu_\beta=\frac{\gamma\sqrt{3}}{2}$, και $\mu_\gamma=\frac{\beta\sqrt{3}}{2}$.

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές μ_α, μ_β και μ_γ είναι όμοιο με το ΑΒΓ

δ) Αν $\alpha=\gamma\sqrt{2}$ και $\mu_\beta=3\sqrt{3}$ να υπολογίσετε τις πλευρές του ΑΒΓ

39. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (γωνΑ=90^o) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε είναι το σημείο επαφής του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με την πλευρά ΒΓ και Μ το μέσο της ΒΓ, να αποδειχθεί ότι $\frac{\mathrm{M\Delta}}{\mathrm{ME}}=\frac{\beta+\gamma}{\alpha}$.

<u>ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ΄ΟΜΑΔΑΣ</u>

40. Σε κύκλο (Ο, R) με κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ ισχύει $ΑΓ^2+ΒΓ^2+ΒΔ^2+ΔΑ^2=8R^2$.

41. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΓΔ παράλληλη της ΑΒ. Αν Μ τυχαίο σημείο της διαμέτρου ΑΒ, δείξτε ότι $ΜΓ^2+ΜΔ^2=ΜΑ^2+ΜΒ^2$

42. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Από το σημείο Μ φέρνουμε ευθεία κάθετη προς την ΑΒ που την τέμνει στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

$$3ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - ΒΓ^2 = 4ΑΒ.ΑΔ.$$

43. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\mu_\beta \perp \mu_\gamma$.

Α)Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{\mu_\alpha}{\alpha}$

Β)Να δειχθεί ότι $\beta^2+\gamma^2=5\alpha^2$

Γ)Τι συμπεραίνετε για το είδος της γωνίας A;

43. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\mathrm{A}}=90^0$) στο οποίο είναι $\hat{\mathrm{B}}=3\hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι $\beta^2-\gamma^2=2\cdot\beta\cdot\gamma$.

44. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα R. Μέσα στον κύκλο παίρνουμε σταθερό σημείο Α και κατασκευάζουμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα τη χορδή ΒΓ. Αν Μ είναι το μέσο της μεταβλητής της υποτείνουσας ΒΓ και Δ το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΚΑ, να δείξετε ότι:

α) $ΑΜ^2 + ΚΜ^2 = R^2$ β) ΜΔ = σταθερό

45. Με κέντρο το σημείο τομής των διαγωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ γράφουμε κύκλο τυχαίας ακτίνας. Αν Ρ σημείο του κύκλου, να δείξετε ότι:
$ΡΑ^2 + ΡΒ^2 + ΡΓ^2 + ΡΔ^2$ = σταθερό.