

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} (\ln x + e^x + x^2 - x - e)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2\eta\mu x + 3\sigma\upsilon\nu x)$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 1 - \sqrt{x + 5}}{x + 4}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 7}{x^2 - 1}$$

2. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)^2}{x^2 - 9}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x + 1}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + x)^3 - 1}{x}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x^4 - 16}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow \sqrt{7}} \frac{x^2 - \sqrt{7}x}{x^2 - 7}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$$

3. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x^2 - 7x + 10}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 2x - 15}$$

$$\text{vi. } \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^3 + 4t^2 + 4t}{t^2 - t - 6}$$

4. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 3x + 2}{x + 2}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^2 - 1}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 4x^2 - 3x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 2}{2x^2 - 5x + 2}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 2x - 2}{x^3 - x^2 + 3x - 3}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 + 5x - 2}{x^2 + x - 2}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 7x + 6}$$

5. Να υπολογιστούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 16} \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x - 10}{5 - \sqrt{5x}}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2} - 2}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - 3}{x^2 - 49}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x^2+3} + 2x}{x+1}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+2}}$$

$$\text{viii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\text{x. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3x+1}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\text{xi. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+x}}{\sqrt{4+3x} - \sqrt{4+5x}}$$

$$\text{xii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + 1$. Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 5x + 6}$

iii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h}$

7. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 3x$. Να υπολογιστούν τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2 - \sqrt{x+4}}$

iii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h}$

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 4}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού λ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} [(x - 2) \cdot f(x)] = \lambda^2 + \lambda$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x - 2\sqrt{x^2 + 5}$.

i. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$.

ii. Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού λ ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} [f(x) + \lambda^2 + 1] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x - 2}$.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

i. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

iii. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x - 1}$ και $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x + 2}$.

11. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha\sqrt{x^2 - x + 9} - 3\beta}{\sqrt{x} - 1}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

ii. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο $A(9, 3)$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 1$.

iii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

12. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot x^2 + 1$, της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(\frac{1}{2}, 0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, -6)$.

i. Να αποδειχθεί ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -5$.

ii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x^2 + x - 1}$.

13. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 3x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 7, & x = 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \frac{x^2 - x}{1 - \sqrt{x}}$ και $g(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \neq 1 \\ -3, & x = 1 \end{cases}$.

- Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των f, g .
- Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- Να εξεταστεί αν η g είναι συνεχής συνάρτηση στο 1.

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \lambda, & x = 1 \end{cases}$

- Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.
- Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού λ ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.

16. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{2x - 4}, & x \neq 2 \\ \frac{a^2}{2} + a, & x = 2 \end{cases}$.

- Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε η f να είναι συνεχής στο 2.

17. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{16 - x^2}{4 - x}, & x \neq 4 \\ a^2 - 2a, & x = 4 \end{cases}$.

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρεθούν οι τιμές του a ώστε η f να είναι συνεχής στο 4.

18. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{3x - 2}}{x - 1}, & x > 1 \\ 2a + 1, & x = 1 \end{cases}$.

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .
- Να βρεθεί η τιμή του a ώστε η f να είναι συνεχής στο 2.

19. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}, & x \neq 1 \\ 2\alpha - 3, & x = 1 \end{cases}$.

i. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

ii. Να βρεθεί η τιμή του α ώστε η f να είναι συνεχής στο 1.

20. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο \mathbf{R} με $f(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha + \beta) \cdot (x^2 - 1) - 2(x + 1)}{x + 1}, & x \neq -1 \\ \alpha^2 + \beta^2, & x = -1 \end{cases}$.

i. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2(\alpha + \beta) - 2$.

ii. Να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = -1$.

21. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο 1 με $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}, x \neq 1$.

i. Να αποδειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

ii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 \cdot f(x) - f(x)}{3x^2 - x - 2}$.

iii. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\frac{1}{2}$.

22. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f στο \mathbf{R} με $f(3) = \sqrt{3}$.

Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(f(x) - \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}}{f^2(x) - 3}$.

23. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ \kappa = -\lim_{y \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{\alpha}}{y - \alpha}, & x = 2 \end{cases}$, όπου $\alpha > 0$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

iii. Να υπολογιστεί το όριο $\kappa = -\lim_{y \rightarrow \alpha} \frac{\sqrt{y} - \sqrt{\alpha}}{y - \alpha}$.

iv. Να υπολογιστεί τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

24. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6(\alpha + \beta) \cdot x}{x^2 - 3x}, & x \neq 0 \\ \alpha^2 + \beta^2 + 2, & x = 0 \end{cases}$, οποία είναι συνεχής.

i. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2\alpha - 2\beta$.

ii. Να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = -1$.