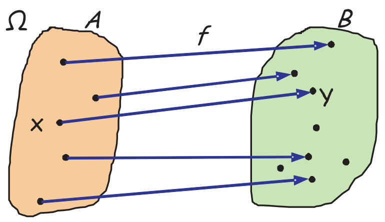
Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ



Ορισμός Συνάρτησης

Ορισμός: **Συνάρτηση** είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου Α αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου Β.

Το σύνολο Α λέγεται **πεδίο ορισμού** της συνάρτησης.

Ορισμός: **Πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** λέγονται οι συναρτήσεις στις οποίες το πεδίο ορισμού Α, είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, ενώ το Β συμπίπτει με το R.

Το $f(x)$ λέγεται **τιμή** της f στο x. Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του Α, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Όταν το $f(x)$ εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το "ευρύτερο" υποσύνολο του R στο οποίο το $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο Α, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

Το **άθροισμα** $S=f+g$, με $S(x)=f(x)+g(x)$, $x \in A$

Η **διαφορά** $D=f-g$, με $D(x)=f(x)-g(x)$, $x \in A$

Το **γινόμενο** $P=f\cdot g$, με $P(x)=f(x)\cdot g(x)$, $x \in A$ και

Το **πηλίκο** $R=\dfrac{f}{g}$, με $R(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x)\neq 0$.

Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Ονομάζουμε **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη** της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$.

Επομένως, ένα σημείο $M(x,y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν $y=f(x)$. Η εξίσωση $y=f(x)$ επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x,y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται εξίσωση της γραφικής παράστασης της f.

Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

Ορισμός: Έστω συνάρτηση f και Δ ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της. Η f λέγεται:

- **Γνησίως αύξουσα** στο Δ όταν για κάθε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- **Γνησίως φθίνουσα** στο Δ όταν για κάθε $x_1,x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$ ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$.

Ορισμός: Μια συνάρτηση που είναι γν. αύξουσα ή γν.φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέμε ότι παρουσιάζει:

- **Τοπικό μέγιστο** στο $x_1 \in A$, όταν $f(x)\leq f(x_1)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_1
- **Τοπικό ελάχιστο** στο $x_2 \in A$, όταν $f(x)\geq f(x_2)$, για κάθε x σε μια περιοχή του x_2 .

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης f, τοπικά ή ολικά, λέγονται **ακρότατα** της f.

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου

Όριο Συνάρτησης

Θεώρημα: Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε:

i) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \ell_1 + \ell_2$

ii) $\lim\limits_{x\to x_0}(kf(x)) = k\ell_1$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = \ell_1\ell_2$

iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{\ell_1}{\ell_2}$

v) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^{\nu} = \ell_1^{\nu}$

vi) $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell_1}$

Ορισμός: Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται **συνεχής**, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Θεώρημα: Οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις.

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Παράγωγος της f στο $x = x_0$

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Αν το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η f λέγεται **παραγωγίσιμη** στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος** της f στο x_0, και συμβολίζεται με $f'(x_0)$. Έχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Ορισμός: Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το **ρυθμό μεταβολής** του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$.

Ορισμός: Ο **συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης** της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ο αριθμός $\lambda = f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.

Ορισμός: Η **ταχύτητα** ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0 $\upsilon(t_0) = f'(t_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ δεν έχει παράγωγο στο σημείο $x_0 = 0$.

Απόδειξη: Όταν $h<0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h} = -1$,

ενώ όταν $h>0$, έχουμε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h}{h} = 1$,

Άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$, δηλ. η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός Παραγώγου Συνάρτησης

Ορισμός: Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A, και B το σύνολο των $x \in A$ στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε $x \in B$ αντιστοιχίζεται στο $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου

Η συνάρτηση αυτή λέγεται **(πρώτη) παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f'.

Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''.

Παρατήρηση: Αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι $x(t)$ τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητά του θα είναι $\upsilon(t) = x'(t)$.

Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση υ είναι παραγωγίσιμη, τότε η **επιτάχυνση** του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει $\alpha(t) = \upsilon'(t)$ ή $\alpha(t) = x''(t)$.

Παραγώγιση Βασικών Συναρτήσεων

Θεώρημα: **Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$**

Απόδειξη: Έχουμε $f(x+h) - f(x) = c - c = 0$ και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$,

οπότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0$. Άρα $(c)' = 0$.

Θεώρημα: **Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$**

Απόδειξη: Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h) - x = h$, και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$. Άρα $(x)' = 1$.

Θεώρημα: **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^2$**

Απόδειξη: Έχουμε $f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 = x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h$,

και για $h \neq 0$, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \dfrac{(2x+h)h}{h} = 2x + h$.

Επομένως, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h) = 2x$. Άρα $(x^2)' = 2x$

Παρατήρηση: Αποδεικνύεται ότι $(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}$, όπου ν φυσικός.

Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός. Δηλαδή:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1\cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2}, \qquad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2\cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}\cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$ Άρα $(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$, όπου ρ ρητός αριθμός.

Θεώρημα: **Ισχύουν: $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$ και $(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$.**

Θεώρημα: **Ισχύουν: $(e^x)' = e^x$ και $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.**

Κανόνες Παραγώγισης

Θεώρημα: **Η παράγωγος της συνάρτησης $cf(x)$**

Απόδειξη: Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$. Για $h \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{cf(x+h)-cf(x)}{h} = c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left[c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = cf'(x)$.

Άρα $(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$.

Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ Λυκείου

Θεώρημα: **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)+g(x)$**

Απόδειξη: Έστω η συναρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$. Έχουμε

$F(x+h)-F(x)=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x)) =(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))$,

και για $h\neq 0$, $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x)$.

Άρα $\boxed{(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)}$

Θεώρημα: **Παράγωγος γινομένου και λόγου συναρτήσεων**

$\boxed{(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)\cdot g'(x)}$ **και** $\boxed{\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$.

Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης

Η συνάρτηση F λέγεται **σύνθεση** της g με την f όταν η συνάρτηση $F(x)$ προκύπτει αν στην $f(x)$ θέσουμε όπου x το $g(x)$. Δηλαδή, $F(x)=f(g(x))$

Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει: $(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης.

Βασικοί τύποι παραγώγισης	
$(c)'=0$	$(x)'=1$
$(x^{\rho})'=\rho x^{\rho-1}$	$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\eta\mu x)'=\sigma\upsilon\nu x$	$(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$
$(e^x)'=e^x$	$(\ell n x)'=\dfrac{1}{x}$

Κανόνες παραγώγισης
$(cf(x))'=cf'(x)$
$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(f(g(x)))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$

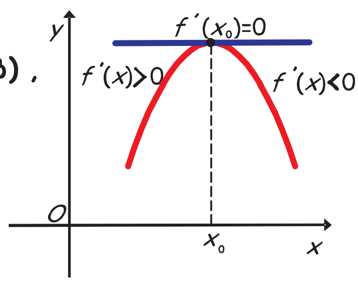
1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου

Θεώρημα: **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει :**

- **$f'(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.**
- **$f'(x)<0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.**

Θεώρημα:



- **Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ μέγιστο.**

- **Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)<0$ στο (α,x_0) και $f'(x)>0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$ ελάχιστο.**