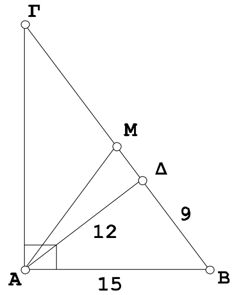
ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

---

1. Στο διπλανό σχήμα δίνονται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΒ=15, το μέσον Μ της υποτείνουσας ΒΓ του τριγώνου και το σημείο Δ της ΒΓ, για το οποίο ισχύει: ΑΔ=12, ΒΔ=9.

   α) Να αποδείξετε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.
   β) Να υπολογίσετε τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ.
   γ) Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.



---

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) δίνονται: $\mu_\alpha = 10$ και $\beta = 10\sqrt{3}$. Να υπολογιστούν οι γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ καθώς και το ύψος υ_α.

---

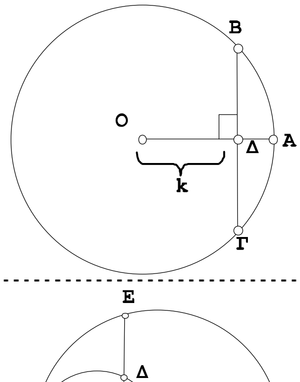
3. Να δείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) ισχύει ότι $\beta + \gamma \le \alpha\sqrt{2}$. Πότε ισχύει το ίσον;

---

4. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ακτίνα του ΟΑ. Αν μια χορδή του ΒΓ κάθετη στην ακτίνα ΟΑ στο σημείο Δ και ΟΔ=κ, να αποδείξετε:

   i) $B\Gamma^2 = 4(R-\kappa)(R+\kappa)$

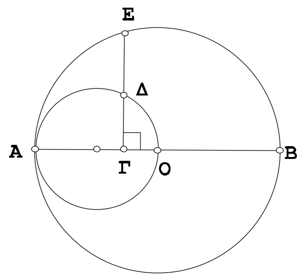
   ii) $A\Gamma^2 = 2R(R-\kappa)$



---

5. Δίνεται κύκλος (O,R) και AB διάμετρός του. Με διάμετρο την OA σχηματίζουμε δεύτερο κύκλο. Σε τυχαίο σημείο Γ της OA φέρνουμε ευθεία κάθετη στην AB, που τέμνει τον εσωτερικό κύκλο στο Δ και τον εξωτερικό στο E. Να αποδείξετε ότι:

$$AE^2 = 2A\Delta^2$$

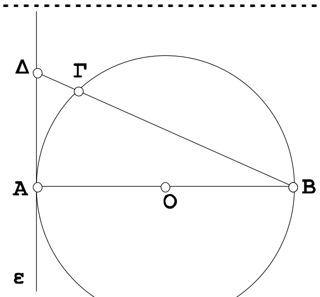


---

6. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ΑΒ διάμετρός του. Έστω ε η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Από το Β φέρνουμε ευθεία που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ και την ευθεία ε στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

   i) $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$

   ii) $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$



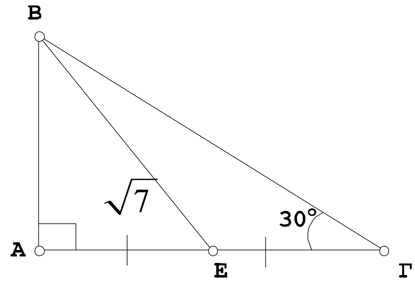
---

7. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α=90°) η γωνία $\hat{\Gamma} = 30^0$ και $BE = \sqrt{7}$, όπου Ε είναι το μέσο της ΑΓ.

   a. Να δείξετε ότι: $BE^2 + \dfrac{3}{4}A\Gamma^2 = B\Gamma^2$

   b. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ.

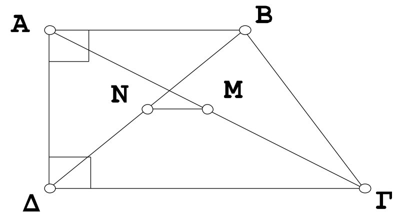
   (ΑΠ. ΒΓ=4, ΑΒ=2, $A\Gamma = 2\sqrt{3}$)



---

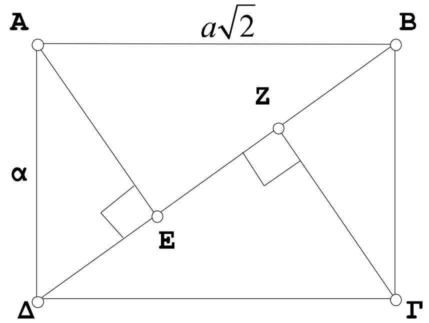
8. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι $\hat{A}=\hat{B}=90^0$. Αν Μ,Ν είναι τα μέσα των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

$$B\Gamma^2 - A\Delta^2 = 4MN^2$$



9. Ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει $AB=\alpha\sqrt{2}$ και $A\Delta=\alpha$, όπου α γνωστό ευθύγραμμο τμήμα.

i) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α το μήκος της ΒΔ.
ii) Να δείξετε ότι οι προβολές Ε και Ζ των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα, διαιρούν την διαγώνιο αυτή σε τρία ίσα τμήματα, δηλαδή ΔΕ=ΕΖ=ΖΒ.



<u>ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ</u>

1. <u>Ασκήσεις που ζητείται ο υπολογισμός ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών ή ζητείται να αποδειχθεί κάποια μετρική σχέση μεταξύ των πλευρών τριγώνου.</u>

Εντοπίζουμε ορθογώνια τρίγωνα και γράφουμε τις κατάλληλες μετρικές σχέσεις σε κάθε περίπτωση προσπαθώντας να εμφανίσουμε τα τμήματα που εμπλέκονται στην αποδεικτέα σχέση.
Αν κάποιο από τα εμφανιζόμενα τμήματα δεν υπάρχει στην αποδεικτέα σχέση το αντικαθιστούμε με τη βοήθεια τμημάτων που εμφανίζονται σε αυτή. Η αντικατάσταση γίνεται είτε με τη βοήθεια του Πυθαγορείου θεωρήματος είτε με οποιαδήποτε άλλη γνωστή μετρική σχέση.

2. <u>Ασκήσεις που ζητείται να δειχθεί ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο.</u>

Εξετάζουμε αν το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών. Αν αυτό συμβαίνει τότε σύμφωνα με το αντίστροφο του Πυθαγορείου θεωρήματος το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία τη γωνία που βρίσκεται απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά.

<u>Παρατηρήσεις</u>

Α. Υπενθυμίζουμε δύο βασικές προτάσεις που χρησιμοποιούμε συχνά σε ορθογώνιο τρίγωνο:

i) Η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
ii) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η κάθετη πλευρά που βρίσκεται απέναντι από γωνία 30° είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Β. <u>Περιπτώσεις που σχηματίζεται ορθή γωνία.</u>

i) Εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.
ii) Η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη κύκλου με την ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι ορθή.
iii) Η ακτίνα που καταλήγει στο μέσο μιας χορδής είναι κάθετη στη χορδή.
iv) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το μέσο της βάσης ισοσκελούς τριγώνου με την απέναντι κορυφή, είναι κάθετο στη βάση.
v) Οι διαγώνιοι ρόμβου και τετραγώνου τέμνονται κάθετα.
vi) Ισοσκελές τρίγωνο με μια γωνία προσκείμενη στη βάση ίση με 45° είναι ορθογώνιο και αντίστροφα, κάθε ορθογώνιο τρίγωνο με μια γωνία 45° είναι ισοσκελές.