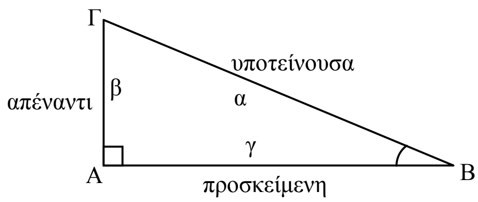
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

[1].Τυπολόγιο τριγωνομετρίας (Επαναλήψεις)

α. Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε ορθογώνιο τρίγωνο



Ορίζω: $\eta\mu B=\frac{\beta}{\alpha}$ $\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$

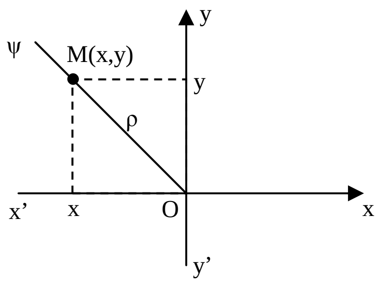
$\sigma\upsilon\nu B=\frac{\gamma}{\alpha}$ $\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$

$\varepsilon\varphi B=\frac{\beta}{\gamma}$ $\left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{προσκείμενη κάθετη}}\right)$

$\sigma\varphi B=\frac{\gamma}{\beta}$ $\left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{απέναντι κάθετη}}\right)$

β. Τριγωνομετρικοί αριθμοί σε σύστημα συντεταγμένων

Σε ένα σύστημα xOy τοποθετώ μία γωνία $\hat{\omega}$ έτσι ώστε ο άξονας Ox να είναι η αρχική πλευρά της γωνίας. Η άλλη πλευρά της λέγεται τελική πλευρά της $\hat{\omega}$. Έστω M(x,y) σημείο τυχαίο της τελικής πλευράς της ω που απέχει από το O απόσταση ρ.



Ορίζω: $\eta\mu\omega=\frac{y}{\rho}$

$\sigma\upsilon\nu\omega=\frac{x}{\rho}$

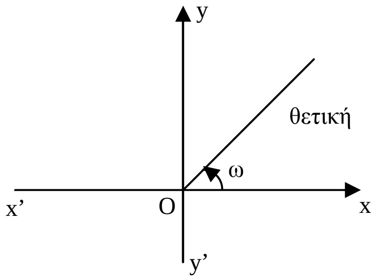
$\varepsilon\varphi\omega=\frac{y}{x}$ $(x\neq 0)$

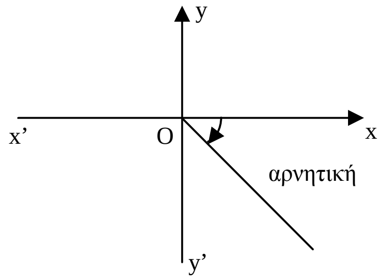
$\sigma\varphi\omega=\frac{x}{y}$ $(y\neq 0)$

γ. Προσανατολισμός γωνίας

Στο καρτεσιανό σύστημα ορίζεται θετική και αρνητική γωνία ανάλογα αν η τελική πλευρά της κινείται αντίθετα από την κίνηση των δεικτών του ρολογιού ή κατά τη φορά της κίνησής τους.

π.χ.





δ. Γωνίες μεγαλύτερες των 360^o

Αν η τελική πλευρά της γωνίας συμπληρώσει μια περιστροφή (360^o) και περιστραφεί επιπλέον κατά γωνία $\hat{\omega}$, τότε η γωνία είναι μεγαλύτερη από 360^o. Είναι $\hat{\varphi}=360^o+\hat{\omega}$.

Γενικά για κ περιστροφές (θετικές ή αρνητικές) σχηματίζονται οι γωνίες $\hat{\varphi}=\kappa.360^o+\hat{\omega}$, $\kappa\in Z$.

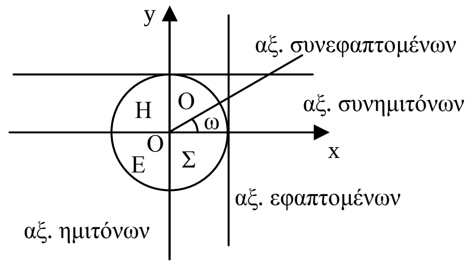
Για αυτές ισχύει:

ημ(κ.360^o+ω)=ημω	εφ(κ.360^o+ω)=εφω
συν(κ.360^o+ω)=συνω	σφ(κ.360^o+ω)=σφω

ε. Τριγωνομετρικός κύκλος (ορισμός)

Αυτός έχει:

- Κέντρο την αρχή των αξόνων xOy.
- Ακτίνα ίση με την μονάδα (ρ=1)
- Φορά θετική την αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού
- Επ' αυτού τοποθετούνται γωνίες προς υπολογισμό των τριγωνομετρικών των αριθμών.



Ισχύουν: **$-1\leq$ημα≤1** **$-1\leq$συνα≤1**

στ. Το ακτίνιο και η μοίρα είναι μονάδες μέτρησης γωνιών

Συμβολισμός: 1^{rad}, 1^o (μοίρα)

Σχέση rad και ^{o} (μοίρας)

Έστω γωνία μ^o και α^{rad}. Ισχύει η σχέση: $\frac{\alpha}{\pi}=\frac{\mu}{180}$.

ζ. Πίνακας γνωστών τριγωνομετρικών αριθμών

Γωνία $\hat{\omega}$		**Τριγωνομετρικοί αριθμοί**			
σε μοίρες	σε rad	ημω	συνω	εφω	σφω
0^o	0	0	1	0	-
30^o	π/6	1/2	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}$
45^o	π/4	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1	1
60^o	π/3	$\sqrt{3}/2$	1/2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}/3$
90^o	π/2	1	0	-	0
180^o	π	0	-1	0	-
270^o	3π/2	-1	0	-	0
360^o	2π	0	1	0	-

η. Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$ημ^2ω+συν^2ω=1$	$σφω=\frac{συνω}{ημω}$
$εφω=\frac{ημω}{συνω}$	
εφω.σφω=1	$ημ^2ω=\frac{εφ^2ω}{1+εφ^2ω}$
$συν^2ω=\frac{1}{1+εφ^2ω}$	

θ. Αναγωγή στο 1^o τεταρτημόριο

1. Γωνίες αντίθετες:

Για τις γωνίες ω και -ω ισχύουν:

ημ(-ω)=-ημω	εφ(-ω)=-εφω
συν(-ω)=συνω	σφ(-ω)=-σφω

2. Γωνίες με άθροισμα $\frac{π}{2}$ ($\hat{ω}$ και $\frac{π}{2}-\hat{ω}$):

$ημ(\frac{π}{2}-ω)=συνω$	$εφ(\frac{π}{2}-ω)=σφω$
$συν(\frac{π}{2}-ω)=ημω$	$σφ(\frac{π}{2}-ω)=εφω$

3. Γωνίες με διαφορά $\frac{π}{2}$ ($\hat{ω}$ και $\frac{π}{2}+\hat{ω}$):

$ημ(\frac{π}{2}+ω)=συνω$	$εφ(\frac{π}{2}+ω)=-σφω$
$συν(\frac{π}{2}+ω)=-ημω$	$σφ(\frac{π}{2}+ω)=-εφω$

4. Γωνίες με άθροισμα π ($\hat{ω}$ και π - $\hat{ω}$):

ημ(π -ω)=ημω	εφ(π -ω)=-εφω
συν(π -ω)=-συνω	σφ(π -ω)=-σφω

5. Γωνίες με διαφορά π ($\hat{ω}$ και π + $\hat{ω}$):

ημ(π +ω)=-ημω	εφ(π +ω)=εφω
συν(π +ω)=-συνω	σφ(π +ω)=σφω

6. Γωνίες με διαφορά π ($\hat{\omega}$ και π + $\hat{\omega}$):

ημ(π +ω)=-ημω	εφ(π +ω)=εφω
συν(π +ω)=-συνω	σφ(π +ω)=σφω

7. Γωνίες με άθροισμα $\frac{3\pi}{2}$ ($\hat{\omega}$ και $\frac{3\pi}{2}$ - $\hat{\omega}$):

ημ($\frac{3\pi}{2}$ -ω)=-συνω	εφ($\frac{3\pi}{2}$ -ω)=σφω
συν($\frac{3\pi}{2}$ +ω)=-ημω	σφ($\frac{3\pi}{2}$ -ω)=εφω

8. Γωνίες με διαφορά $\frac{3\pi}{2}$ ($\hat{\omega}$ και $\frac{3\pi}{2}$ + $\hat{\omega}$):

ημ($\frac{3\pi}{2}$ +ω)=-συνω	εφ($\frac{3\pi}{2}$ +ω)=-σφω
συν($\frac{3\pi}{2}$ +ω)=ημω	σφ($\frac{3\pi}{2}$ +ω)=-εφω

Σημείωση: Για πιο εύκολη απομνημόνευση των σχέσεων αυτών ισχύουν οι εξής κανόνες:

α. Όταν έχω 90^o ή 270^o ο τριγωνομετρικός αριθμός αλλάζει. Έτσι το ημ γίνεται συν, η εφ γίνεται σφ και αντίστροφα.

β. Όταν έχω 180^o ή 0^o ή 360^o ο τριγωνομετρικός αριθμός δεν αλλάζει.

γ. Για να βρω το πρόσημο εξετάζω σε ποιο τεταρτημόριο τελειώνει η γωνία που θέλω να ανάγω στο α' τεταρτημόριο.

[2]. Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

Ορισμός:

Η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A⊆IR λέγεται **ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ**, αν υπάρχει πραγματικός αριθμός T>0, τέτοιος, ώστε για κάθε x∈A, να ισχύει:

α. x+T, x-T∈A

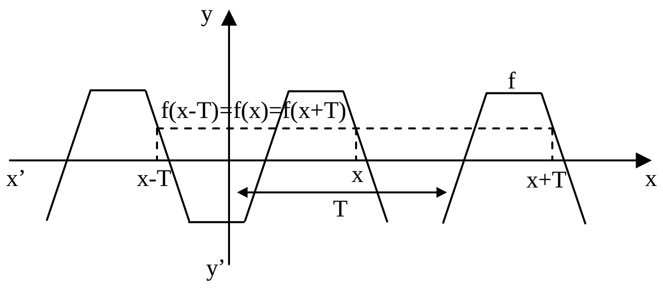
β. f(x+T)=f(x-T)=f(x)

Ο Τ λέγεται **ΠΕΡΙΟΔΟΣ** της f.

Σημείωση:

Ο έλεγχος ως προς την περιοδικότητα μίας συνάρτησης θα γίνεται εδώ εμπειρικά από τη γραφική της παράσταση.

π.χ.

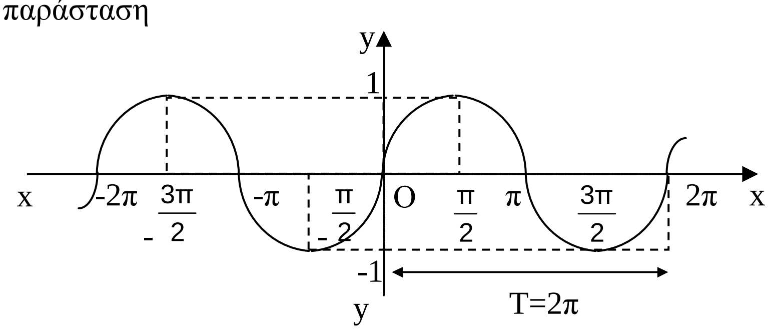


α. Η συνάρτηση f(x)=ημx / A=IR

- Είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π γιατί ισχύει ημ(x-2π)=ημ(x+2π)=ημx.
- Είναι περιττή γιατί: ημ(-x)=ημx.
- Πίνακας μεταβολών:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
ημx	0 ↗	1 ↘	0 ↘	- 1 ↗	0
		max		min	

- Γραφική παράσταση

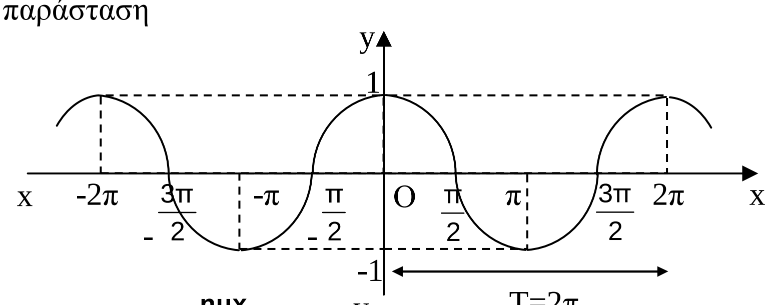


β. Η συνάρτηση f(x)=συνx / A=IR

- Είναι περιοδική με περίοδο Τ=2π γιατί συν(x-2π)=συν(x+2π)=συνx.
- Είναι άρτια γιατί: συν(-x)=συνx.
- Πίνακας μεταβολών:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
συνx	1 ma ↘	0 ↘	-1 min ↗	0 ↗	1 ma

- Γραφική παράσταση

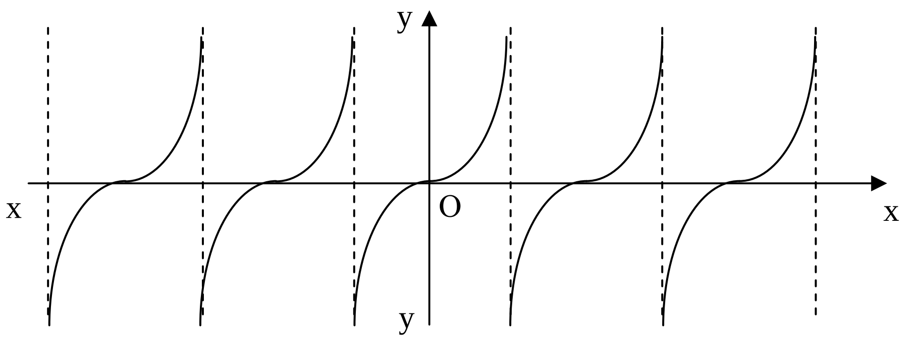


γ. Η συνάρτηση f(x)=εφx=$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, συνx

- Είναι περιοδική με περίοδο Τ=π γιατί εφ(x+π)=εφ(x-π)=-εφx.
- Είναι περιττή γιατί: εφ(-x)=-εφx.

- Η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτες ευθείες x=$\frac{\pi}{2}$ και x=-$\frac{\pi}{2}$ και περνάει από την αρχή των αξόνων Ο(0,0) γιατί εφ0=0.

- Γραφική παράσταση



Σχόλιο

- Γενικά σε μια συνάρτηση της μορφής f(x)=ρημωx, όπου ρ,ω>0:
  i) το ρ είναι η μέγιστη τιμή της και το –ρ η ελάχιστη τιμή της.
  ii) το ω καθορίζει την περίοδο της συνάρτησης που είναι ίση με Τ=$\frac{2\pi}{\omega}$.
- Τα ίδια συμπεράσματα ισχύουν και για τη συνάρτηση της μορφής f(x)=ρσυνωx.
- Επίσης σε μια συνάρτηση της μορφής f(x)=κ+ρημβx, η μέγιστη τιμή της είναι κ+ρ και η ελάχιστη κ-ρ. Η περίοδός της είναι Τ=$\frac{2\pi}{\omega}$.

[3]. Λύση βασικών τριγωνομετρικών εξισώσεων

$$\begin{matrix}\eta\mu x=\alpha \Leftrightarrow \eta\mu x=\eta\mu\theta \\ -1\le\alpha\le 1,\ \theta\in[-\pi,\pi],\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\theta \\ x=2\kappa\pi+\pi-\theta \end{cases},\ \kappa\in Z$$

$$\begin{matrix}\sigma\upsilon\nu x=\alpha \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu\theta \\ -1\le\alpha\le 1,\ \theta\in[-\pi,\pi],\end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\kappa\pi+\theta \\ x=2\kappa\pi-\theta \end{cases},\ \kappa\in Z$$

$$\begin{matrix}\varepsilon\varphi x=\alpha \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\theta \\ \alpha\in IR\ \ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\end{matrix} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta\ ,\ \kappa\in Z$$

$$\begin{matrix}\sigma\varphi x=\alpha \Leftrightarrow \sigma\varphi x=\sigma\varphi\theta \\ \alpha\in IR\ \ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\end{matrix} \Leftrightarrow x=\kappa\pi+\theta\ ,\ \kappa\in Z$$

Παραδείγματα τριγωνομετρικών εξισώσεων:

1. Να λυθεί η εξίσωση: ημ$\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$=ημ$\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)$

Λύση

Έχω ημ$\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$=ημ$\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)\Leftrightarrow$ x+$\frac{\pi}{6}$=2κπ+2x+ $\frac{3\pi}{4}$ (1) και

x+$\frac{\pi}{6}$=2κπ+π-(2x+$\frac{3\pi}{4}$) (2) κ∈Z

(1)⇒x=-2κπ-$\frac{7\pi}{12}$, κ∈Z

(2)⇒x=$\frac{2\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{36}$, κ∈Z

2. . Να λυθεί η εξίσωση: συν$\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$=ημ$\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)$.

Λύση

συν$\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$=ημ$\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\overset{\text{Λύση}}{\Leftrightarrow}$ συν$\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$=συν$\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)\right]\Leftrightarrow$συν$\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$=

συν$\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)\Leftrightarrow$

⇔5x-$\frac{\pi}{3}$=2κπ+$\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)$ (1) κ∈Z

5x-$\frac{\pi}{3}$=2κπ-$\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)$ (2) κ∈Z

(1)⇒x=$\frac{4\kappa\pi}{9}+\frac{4\pi}{27}$, κ∈Z

(2)⇒x=$\frac{4\kappa\pi}{11}$, κ∈Z

3. Να λυθεί στο [0,2π] η εξίσωση εφ(2x-$\frac{\pi}{6}$)=$\sqrt{3}$.

Λύση

εφ(2x-$\frac{\pi}{6}$)=$\sqrt{3}$ ⇔εφ(2x-$\frac{\pi}{6}$)=εφ$\frac{\pi}{3}$⇔2x-$\frac{\pi}{6}$=κπ+$\frac{\pi}{3}$⇔ … ⇔x=$\frac{\kappa\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$, κ∈Z

4. Να λυθεί η εξίσωση σφ$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5x}{2}\right)$=σφ$\left(x+\frac{\pi}{8}\right)$.

Λύση

σφ$\left(\frac{\pi}{2}-\frac{5x}{2}\right)$=σφ$\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\Leftrightarrow$ $\frac{\pi}{2}-\frac{5x}{2}$=κπ+x+$\frac{\pi}{8}$⇔-x-$\frac{5x}{2}$=-$\frac{\pi}{2}$+κπ+$\frac{\pi}{8}$⇔ …

⇔x=$-\frac{2\kappa\pi}{7}+\frac{3\pi}{28}$, κ∈Z