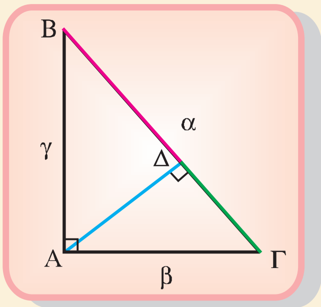
# ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟ ΟΡΘ. ΤΡΙΓΩΝΟ

## ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ: Τύποι - Βασικές έννοιες

**Σε ορθογώνιο τρίγωνο.**




*ΒΓ υποτείνουσα*
*ΑΔ ύψος*
*ΓΔ προβολή του ΑΓ στην υποτείνουσα*
*ΒΔ προβολή του ΑΒ στην υποτείνουσα*

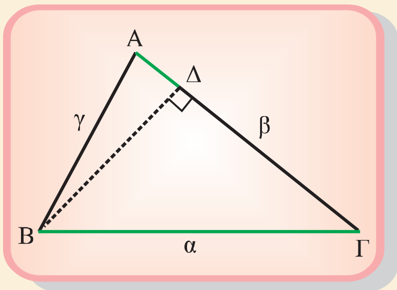
| | |
|---|---|
| **Θεώρημα Ι**<br>Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. | $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$<br>$(\gamma^2 = \alpha \cdot B\Delta)$<br>$A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$<br>$(\beta^2 = \alpha \cdot \Gamma\Delta)$ |
| **Πόρισμα**<br>Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ο λόγος των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους επάνω στην υποτείνουσα. | $\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta B}$ |
| **Θεώρημα ΙΙ** (Πυθαγόρειο Θεώρημα)<br>Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας | $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$<br>ή<br>$\gamma^2 + \beta^2 = \alpha^2$ |
| **Θεώρημα ΙΙΙ** (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)<br>Αν σε κάποιο τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς του είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την μεγαλύτερη πλευρά. | Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, η $\alpha = B\Gamma$ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$<br>τότε $\hat{A} = 90^0$ |
| **Θεώρημα ΙV**<br>Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα. | $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Gamma\Delta$ |
| **Βασικές Εφαρμογές**<br>Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο αν $\upsilon_\alpha$ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισχύει: | $\frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} = \frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$<br>$\beta \cdot \gamma = \alpha \upsilon_\alpha$ |

# ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΕ ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ

## Μετρικές σχέσεις σε τυχαίο τρίγωνο.

**Θεώρημα I (Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος για πλευρά που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία)**

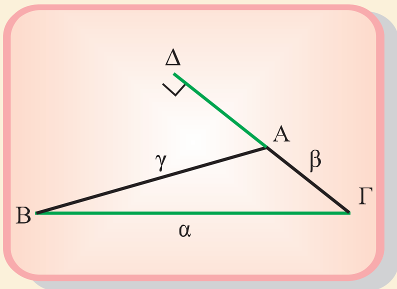
Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης επάνω σε αυτήν.




Για παράδειγμα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$

**Θεώρημα II (Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος για πλευρά που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία)**

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές, επί την προβολή της άλλης πάνω σ' αυτήν.




Για παράδειγμα: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot \mathrm{A\Delta}$

**Πόρισμα**

**i.** $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 1^L$ **ii.** $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} = 1^L$ **iii.** $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 1^L$

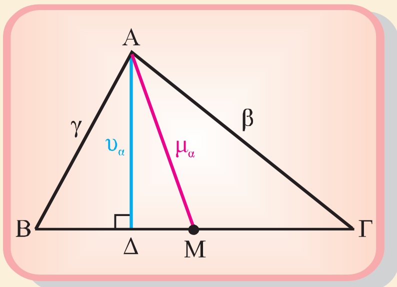
**Νόμος Συνημιτόνων**

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A\,,\ \beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\,\text{συν}B\,,\ \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\,\text{συν}\Gamma$$

**Θεώρημα III (1ο θεώρημα διαμέσων)**

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου, που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.




Για παράδειγμα: $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$

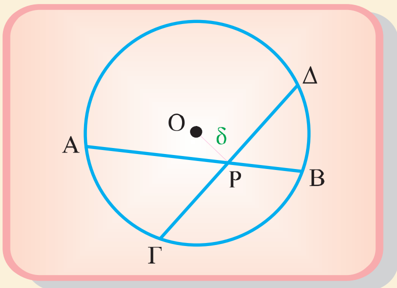
# ΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΤΟΝ ΚΥΚΛΟ

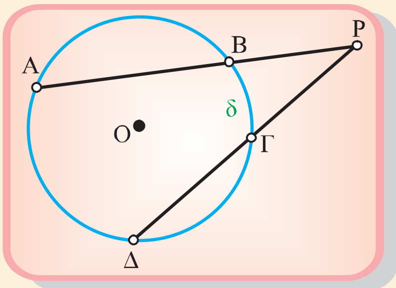
**Θεώρημα IV (2ο θεώρημα διαμέσων)**
Η διαφορά των τετραγώνων των δύο πλευρών ενός τριγώνου, ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς, επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου στην πλευρά αυτή.
Για παράδειγμα: $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot \Delta M$ ($\beta > \gamma$)
**Τύποι διαμέσων:**

$$\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4} \qquad \mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} \qquad \mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

## Μετρικές σχέσεις σε κύκλο.

**Θεώρημα Ι**



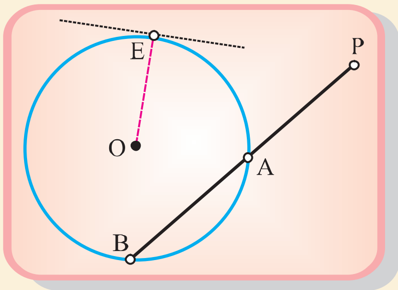

Αν οι χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους, τέμνονται σ' ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει: ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ

**Εφαρμογή 1 (αντίστροφο του θεωρήματος Ι)**
Αν δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ έτσι ώστε: ΡΑ · ΡΒ = ΡΓ · ΡΔ, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ και Δ είναι εγγράψιμο.

**Παρατήρηση 1**
Αν το σημείο Ρ βρίσκεται **εντός του κύκλου** τότε είναι: ΡΑ · ΡΒ = $R^2 - \delta^2$
όπου δ = ΟΡ (Ο το κέντρο του κύκλου) και R η ακτίνα του κύκλου.

Αν το σημείο Ρ βρίσκεται **εκτός του κύκλου** τότε: ΡΑ · ΡΒ = $\delta^2 - R^2$

# ΔΥΝΜΗ ΣΗΜΕΙΟΥ ΣΕ ΚΥΚΛΟ




**Θεώρημα ΙΙ**
Αν από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O,R), φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα PE και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B, ισχύει: $PE^2 = PA \cdot PB$

**Εφαρμογή 2 (αντίστροφο του θεωρήματος ΙΙ)**
Αν θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της P, A, B, όπου το σημείο P βρίσκεται εκτός του τμήματος AB και ένα σημείο E εκτός της ε τέτοιο ώστε να ισχύει: $PE^2 = PA \cdot PB$, το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο στον κύκλο που ορίζουν τα σημεία A, B, E.

**Ορισμός**
Έστω P σημείο του επιπέδου του κύκλου (O,R), με $\delta = OP$. Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται **δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)** και συμβολίζεται $\Delta^P_{(O,R)}$.

Είναι $\Delta^P_{(O,R)} = \delta^2 - R^2$

**Παρατήρηση 2**
Το πρόσημο του αριθμού $\delta^2 - R^2$ καθορίζει τη θέση του P ως προς τον κύκλο. Συγκεκριμένα:

**α.** Αν το σημείο P βρίσκεται εντός του κύκλου είναι: $\Delta^P_{(O,R)} < 0$

**β.** Αν το σημείο P βρίσκεται εκτός του κύκλου είναι: $\Delta^P_{(O,R)} > 0$

**γ.** Αν το σημείο P είναι σημείο του κύκλου είναι: $\Delta^P_{(O,R)} = 0$

**δ.** Αν το σημείο P συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου είναι: $\Delta^P_{(O,R)} = -R^2$