ΚΕΦ.1ο ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

1. Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύουν $|\vec{\beta}|=2|\vec{\alpha}|$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|$, αποδείξτε ότι τα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα .

2. Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $3|\vec{\alpha}| = 4|\vec{\beta}| = 12|\vec{\gamma}|$, αποδείξτε ότι :

i) τα $\vec{\beta}$,$\vec{\gamma}$ είναι ομόρροπα και ii) τα $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ είναι αντίρροπα .

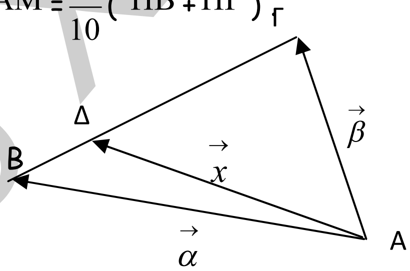
3. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ της διαγωνίου ΑΓ
έτσι ώστε: ΑΕ = ΖΓ = $\frac{1}{4}$ **ΑΓ**

α) Αν $\vec{AB}=\vec{\alpha}$ και $\vec{B\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Να δείξετε ότι το ΕΒΖΔ είναι παραλληλόγραμμο .

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ . Θεωρούμε σημείο Η τέτοιο ώστε $\vec{AH} = -4\vec{AM}$. Να δείξετε ότι : $\vec{AM}=\frac{1}{10}(\vec{HB}+\vec{H\Gamma})$

5. Στο διπλανό σχήμα είναι ΔΓ = 3ΔΒ .
Αποδείξτε ότι $\vec{x}=\frac{1}{4}(3\vec{\alpha}+\vec{\beta})$.



6. Δίνονται τα σημεία Α , Β , Γ . Αποδείξτε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $\vec{\delta} = 5\vec{MA} - 8\vec{M\Gamma} + 3\vec{MB}$ είναι σταθερό .

7. Αν ισχύει $7\vec{MB}+3\vec{\Gamma M} = 4\vec{MA}$, να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά .

8. Να αποδείξετε ότι αν $(\kappa+2)\vec{PA} + 3\vec{PB} = (\kappa+5)\vec{P\Gamma}$ τότε τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά .

9. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ , Ε και Ζ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις :
$\vec{A\Delta}=\frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{\Gamma E}=\frac{1}{2}\vec{B\Gamma}$ και $\vec{AZ}=\frac{3}{5}\vec{A\Gamma}$.

α) Αν $\vec{AB}=\vec{\alpha}$ και $\vec{A\Gamma}=\vec{\beta}$ να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{\Delta E}$ και $\vec{\Delta Z}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

β) Αποδείξτε ότι τα σημεία Δ , Ε , Ζ είναι συνευθειακά .

10. Αν $\vec{OA} = 2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}-5\vec{\gamma}$, $\vec{OB} = 4\vec{\alpha}-\vec{\beta}+6\vec{\gamma}$, $\vec{O\Gamma} = -2\vec{\alpha}+11\vec{\beta}-27\vec{\gamma}$ τότε να δείξετε ότι τα σημεία Α , Β , Γ είναι συνευθειακά .

11. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\lambda^2 - 4 , \lambda + 2)$, όπου $\lambda \in \Re$.

α) Να βρείτε το λ ώστε το $\vec{\alpha}$ να είναι το μηδενικό διάνυσμα .

β) Αν $\vec{\beta} = (4\lambda - 7 , 3)$, να βρείτε το λ ώστε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

12. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1 , -3)$, $\vec{\beta} = (-1 , 2)$, $\vec{\gamma} = (-1 , 1)$.

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{v} = 5\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 3\vec{\gamma}$.

β) Να εκφραστεί το $\vec{\gamma}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

13. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Κ . Αν Α(1 , 2) , Β(5 , 3) και Κ(4 , 5) , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .

14. Αν τα σημεία Κ(4 , 0) , Λ(6 , 2) , Μ(3 , 5) είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ , ΒΓ , ΑΓ αντιστοίχως του τριγώνου ΑΒΓ , να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου .

15. Δίνονται τα σημεία Α(3 , - 4) και Β(2 , 1) . Να βρείτε :
α) το συμμετρικό του Α ως προς κέντρο συμμετρίας το Β .
β) το συμμετρικό του Β ως προς κέντρο συμμετρίας το Α .

16. Αν για τα σημεία Α , Β , Μ ισχύει $\vec{AM} = 2\vec{MB}$ και Α(- 1 , 2) , Β(3 , - 1) , να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ .

17. Να βρεθεί ο $\kappa \in \Re$ ώστε τα σημεία Α(κ , κ – 1) , Β(- 1 , 3) , Γ(2κ , 6) να είναι συνευθειακά .

18. Δίνονται τα διανυσματα $\vec{\alpha} = (1,3)$ $\vec{\beta} = (-2,3)$ και $\vec{\gamma} = (3,-2)$ να βρεθεί ο πραγματικός x ώστε $\vec{\alpha} + x\vec{\beta} // \vec{\beta} + \vec{\gamma}$

19. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (\sqrt{12} , \kappa^2 + 2)$, όπου $\kappa \in \Re$.

α) Να βρείτε το κ ώστε το $\vec{\alpha}$ να σχηματίζει γωνία 60^o με τον άξονα x΄x .
β) Για τις τιμές του κ που βρήκατε στο (α) ερώτημα , να δείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\beta} = (\sqrt{75} , 15)$ είναι παράλληλο προς το $\vec{\alpha}$.

20. Αν $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 4)$ να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως:
α) $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$ β) $\vec{p} // \vec{\alpha}$
γ) $\vec{q} \perp \vec{\beta}$

21. Έστω $\vec{\alpha} = (\kappa - 1 , -2)$ και $\vec{\beta} = (-4 , 10)$. Να βρείτε τον $\kappa \in \Re$, στις επόμενες περιπτώσεις : i) $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ = 20 , ii) $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

22. Αν $\vec{\alpha}$ = (0 , - $\sqrt{2}$) και $\vec{\beta}$ = (1 , - 1) , να βρείτε :

α) το $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$, β) το (3$\vec{\alpha}$ - $\vec{\beta}$)($\vec{\alpha}$ + 2$\vec{\beta}$) , γ) την γωνία των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

23. Αν $|\vec{\alpha}|$ = 1 , $|\vec{\beta}|$ = 2 και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{2\pi}{3}$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$ = $\vec{\alpha}$ - 2$\vec{\beta}$.

24. Αν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| \neq 0$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| = |\vec{\alpha}|$ τότε :

α) να δείξετε ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta} = -\frac{1}{2}\cdot|\vec{\alpha}|^2$, β) να δείξετε ότι η $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ είναι αμβλεία ,

γ) να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ = 2$\vec{\alpha}$ + $\vec{\beta}$ και $\vec{v}$ =2$\vec{\alpha}$ +2$\vec{\beta}$.

25. Αν $|\vec{\alpha}|$ = 5 , $|\vec{\beta}|$ = 3 και $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ = 53° , να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ = -3$\vec{\alpha}$ και $\vec{v}$ = $\vec{\alpha}$ - $\vec{\beta}$. Δίνονται συν53° = $\frac{3}{5}$ και συν37° = $\frac{4}{5}$.

26. Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta} - \sqrt{3}\,\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\gamma}|$ =1 , να υπολογίσετε :

α) το $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$, β) τη γωνία $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}})$.

27. Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma} = \vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|$ =1 , $|\vec{\beta}|$ =2 , $|\vec{\gamma}|$ =3 τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$ + $\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}$ + $\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}$.

28. Δίνονται τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$. Να βρείτε διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο ώστε $\vec{x}$ // ($\vec{\alpha}$ + $\vec{\beta}$) και $\vec{\beta} \perp$ ($\vec{\alpha}$ + $\vec{x}$) .

29. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (3 , 5) , $\vec{\beta}$ = (2 , - 1) .

α) Να βρείτε την προβ$_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}$.

β) Να αναλύσετε το διάνυσμα $\vec{\beta}$ σε δύο συνιστώσες , μία παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ και μία κάθετη προς αυτό .

30. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$ με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τέτοια ώστε $\vec{\alpha}$ + $\vec{x}$ = προβ$_{\vec{\beta}}\vec{x}$

Αποδείξτε ότι $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.

31. Αν $\vec{\alpha}$ = (1 , 2) , $\vec{\beta}$ = (3 , 4) να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{p}$ και $\vec{q}$ ώστε να ισχύουν συγχρόνως : $\vec{\alpha} = \vec{p} + \vec{q}$, $\vec{p} // \vec{\alpha}$, $\vec{q} \perp \vec{\beta}$.

32. Αν $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - 3\overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$, $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = 1$ και $|\overrightarrow{O\Gamma}| = \frac{\sqrt{5}}{3}$,

α. να δείξετε ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

β. να βρείτε τη σχετική θέση των Α, Β, Γ.

γ. να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ είναι ορθογώνια.

δ. να αποδείξετε ότι η γωνία των $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O\Gamma}$ είναι οξεία.

33. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (-1,-2), \vec{\beta} = (2,0)$ και $\vec{x}$ για τα οποία ισχύουν:

- $\vec{x} // (\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \perp (\vec{x} - \vec{\beta})$

α. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$

β. Να υπολογίσετε το συν$(\vec{\beta}, \vec{x})$. .

34. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A = 60^{o}$ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ ώστε $B\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{\beta}$ και $|\vec{\beta}| = 2|\vec{\alpha}| = 2.$

.α. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{A\Delta} = \frac{1}{3}(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}).$

.β. Να βρείτε το συν$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Delta})$. .

ΚΕΦ. 2ο ΕΥΘΕΙΑ

35. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από σημείο Α(2,-3) και

i. έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -2$.

ii. σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία $\omega = 150^{o}$

iii. είναι παράλληλη στην ευθεία $\eta : y = -x + 2$

iv. είναι κάθετη στην ευθεία $\zeta : y = \frac{3x}{2} - 1$.

v. είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (3,0)$.

vi.είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{u} = (-5,0)$

36. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών: y = 2x + 1 και y = 3x + 2 και είναι:

α) παράλληλη προς την ευθεία y = 4x – 5

β) κάθετη προς την ευθεία y = 3x + 5

γ) διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ) παράλληλη στον άξονα x΄x

ε) παράλληλη στον άξονα y΄y
ς) παράλληλη στη διχοτόμο της πρώτης γωνίας των αξόνων
ζ) παράλληλη στη διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων
η) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού 3 τ.μ.

37. Αν Α(λ-1,2) Β(2λ-3,λ+1) Γ(3λ,2λ), $\lambda \in \Re$ να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ ώστε $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = 2\overrightarrow{\mathrm{B\Gamma}}$.

38. Να βρείτε τις γραμμές που παριστάνουν οι εξισώσεις :
α) $(x - 3y)(x + 3y) = 0$ β) $|3x| - |y| = 0$
γ) $x^{2003} \cdot y^{2004} = 0$ δ) $6x^2 + yx - 2y^2 = 0$
ε) $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$

39. Δύο ύψη ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν εξισώσεις $y = -x$ και $y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$. Η κορυφή Α έχει συντεταγμένες (1 , 2) . Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών του ΑΒΓ .

40. Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ . Δίνεται η κορυφή Α(1 , 1) , η εξίσωση της διαμέσου $\mu_\gamma : y = -x + 1$ και του ύψους $\upsilon_\beta : y = 2$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Β , Γ .

41. Δίνεται η εξίσωση: $-x - 2 + \lambda(2x + 3\psi - 1) = 0, \lambda \in \mathrm{R}$ (1)
α)Να αποδειχθεί ότι:
i)Για κάθε $\lambda \in \Re$ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία.
ii)Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο.
β)Ποια από τις παραπάνω ευθείες είναι κάθετη στην ευθεία (η): $\psi = \frac{1}{2}x + 3$;

42. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών:
$\varepsilon_1 : x - 7y + 2 = 0$ και $3x + 4y - 1 = 0$

43. Δίνεται η εξίσωση: $y^2 - 3x^2 = 0(1)$
i. Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
ii. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα x'x κάθε μία από τις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.
iii. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία $n : x + y = 0$ με την ε_1 και με την ε_2.

44. Να βρείτε τη μεσοπαράλληλο των ευθειών $\varepsilon_1 : x - y - 2 = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y - 4 = 0$.

45. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που διέρχονται από το σημείο $\mathrm{M}(3,2)$ και απέχουν από την αρχή των αξόνων 3 μονάδες.

46. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - 3y + 1 = 0$ και απέχει από το σημείο $\mathrm{A}(2, -1)$ 3 μονάδες.

47. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x + y + 1= 0$ και ε_2 : $2x +2y + 3 = 0$.

α) Να δείξετε ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης των ε_1 , ε_2 .
γ) Να βρείτε την απόσταση των ε_1 , ε_2 .

48. Να υπολογίσετε το εμβαδό του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ του οποίου οι τρεις κορυφές είναι τα σημεία Α(- 2 , 3) , Β(4 , - 5) , Γ(- 3 , 1) .

49. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $y = \lambda x + 3$, ε_2 : $y = (2\lambda - 1)x - 5$,όπου $\lambda \in \Re$.
α) Αποδείξτε ότι για τις τιμές του λ που οι ευθείες ε_1 , ε_2 τέμνονται , το σημείο τομής τους βρίσκεται σε ευθεία ε της οποίας να βρείτε την εξίσωση .
β) Να βρείτε τις τιμές των α , $\beta \in \Re$ ώστε η ευθεία ε να είναι μεσοπαράλληλη των ευθειών δ_1: $y = x - 2$, δ_2 : $\alpha x - \beta y + 3 = 0$.

50. Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x + \sqrt{3}y + 1 = 0$ και ε_2 : $\sqrt{3}x + y + 5 = 0$.
α) Αποδείξτε ότι οι ε_1 , ε_2 τέμνονται .
β) Να βρείτε τις εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών που σχηματίζουν οι ε_1 , ε_2 .

51. Έστω τα σημεία Α(λ + 2, 2λ + 1), Β(λ-3, 3λ-2) και Γ(0, 3λ-5).
α. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \Re$. τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.
β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ(x,y) για τα οποία ισχύει: $\overrightarrow{\mathbf{AM}} = 2\overrightarrow{\mathbf{OM}}$.
γ. Να βρείτε το λ, ώστε το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι ορθογώνιο στο Β.
δ. Να βρείτε το λ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να είναι 8τ.μ.

52. Έστω τα σημεία Α(1 , 1) , Β(5 , 5) και η ευθεία ε : $x - 2y - 1 = 0$. Να βρείτε σημείο Γ της ευθείας ε , ώστε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ να είναι 4 .

53. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει :
$\dfrac{d(M,\varepsilon_1)}{d(M,\varepsilon_2)} = 2$, όπου ε_1: $x - 2y = 0$ και ε_2 : $x + 2y = 0$.

54. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει : (ΜΑΒ) = 2 , όπου Α(- 5 , 0) και Β(3 , 1) .

ΚΕΦ. 3ο ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

55. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :
α) έχει κέντρο το Κ(3 , - 1) και διέρχεται από το σημείο Α(7 , 3)
β) έχει κέντρο το Κ(3 , - 1) και εφάπτεται της ευθείας ε : $y = 2x + 3$
γ) έχει κέντρο το Κ(3 , - 1) και εφάπτεται του άξονα x΄x
δ) έχει κέντρο το Κ(3 , - 1) και εφάπτεται του άξονα y΄y
ε) έχει κέντρο το Κ(3 , - 1) και αποκόπτει από την ευθεία ε : $2x - 5y + 18 = 0$ χορδή μήκους 6 .

56. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις :
α) έχει αντιδιαμετρικά τα σημεία Α(5 , - 2) και Β(- 1 , - 4)
β) διέρχεται από τα σημεία Α(2 , - 6) , Β(1 , 7) και το κέντρο του είναι σημείο της

ευθείας ε : $3x + 2y = 0$

γ) εφάπτεται στις ευθείες $ε_1$: $2x + 3y - 2 = 0$, $ε_2$: $2x + 3y + 4 = 0$ και το ένα από τα δύο σημεία επαφής είναι το Α(1 , - 2)

57. Δίνεται ο κύκλος *C* : $x^2 + y^2 = 10$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του *C* στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) το σημείο επαφής είναι το Α(1 , μ) , μ > 0

β) η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο Α(0 , 4)

γ) η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία ζ : $y = - x + 13$.

58. Δίνεται η ευθεία $y = λx$ και ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η ευθεία:

α) να τέμνει τον κύκλο

β) να εφάπτεται του κύκλου

γ) να μην έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

59. Δίνονται οι κύκλοι $C_1 : x^2 + y^2 = 1$, $C_2 : x^2 + y^2 + 3x + 4y + λ = 0$, και $C_3 : x^2 + y^2 - x - y + λ = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:

1.Οι κύκλοι C_1, C_2 να εφάπτονται εξωτερικά.

2.Οι κύκλο C_1, C_3 να εφάπτονται εσωτερικά.

60. Δίνονται οι κύκλοι C_1: $x^2 + y^2 = 1$ και C_2: $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$.

α) Να δείξετε ότι δεν έχουν κοινό σημείο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διακέντρου.

γ) Από όλα τα ζεύγη σημείων (Α, Β), όπου το Α ανήκει στον C_1 και το Β στον C_2, να βρεθεί αυτό για το οποίο τα Α, Β απέχουν τη μικρότερη απόσταση.

δ) Να βρεθεί το ζεύγος σημείων (Γ, Δ) (το Γ στον C_1, το Δ στον C_2) με τη μεγαλύτερη απόσταση.

61. Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$. Να βρεθεί η εφαπτόμενη στο σημείο του $A(1,1)$

62. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου $x^2 + y^2 = 4$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $x + y = 0$.

63. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ που γράφονται από το σημείο (0, 6).

64. Αποδείξτε ότι τα μέσα των χορδών του κύκλου *C* : $x^2 + y^2 = 4$ οι οποίες είναι παράλληλες προς την ευθεία ε : $3x – y + 1 = 0$, βρίσκονται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση .

65. Δίνονται τα σημεία $\text{Á}(2,0)$, $\text{Â}(1,1)$ και $\text{Ã}(-1,2)$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: $3\overrightarrow{\text{ÌÁ}}^2 + 2\overrightarrow{\text{ÌÂ}}^2 - \overrightarrow{\text{ÌÃ}}^2 = 1$.

66. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το (0, 0) στις παρακάτω

περιπτώσεις :
α) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x και έχει παράμετρο p = 5
β) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα x΄x και διέρχεται από το σημείο (- 1 , 4)
γ) είναι συμμετρική ως προς τον άξονα y΄y και διέρχεται από το σημείο (2 , 2)
δ) έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y και εστία Ε (0, - 4)
ε) έχει διευθετούσα δ : x - 2 = 0
ς) η απόσταση της εστίας από τη διευθετούσα είναι ίση με 6 .

67. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = r^2$ διέρχεται από την εστία της παραβολής $y^2 = 2px$ με $p>0$ και την τέμνει σε 2 σημεία με τετμημένη 1. Να βρεθούν οι εξισώσεις του κύκλου και της παραβολής .

68. Δίνεται η παραβολή $C : y^2 = 2px$ και η εφαπτομένη της ε σε ένα σημείο της Α , η οποία τέμνει τον άξονα x΄x στο σημείο Β . Να δείξετε ότι τα Α , Β έχουν αντίθετες τετμημένες .

69. Από το σημείο Α(- 2 , 3) προς την παραβολή $y^2 = 8x$ γράφονται δύο εφαπτόμενες ευθείες .
α) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων αυτών ευθειών.
β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες αυτές ευθείες είναι κάθετες .

70. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): y = x - 1.
α) Να δείξετε ότι η (ε) περνά από την εστία της παραβολής.
β) Να βρείτε τα κοινά σημεία Α , Β της (ε) και της παραβολής .
γ) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α , Β είναι κάθετες .

71. Δίνεται η εξίσωση : $9x^2 + 4y^2 = 36$ (1) .
α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει έλλειψη .
β) Για την παραπάνω έλλειψη να βρείτε :
i) τα μήκη των αξόνων , ii) τις εστίες , iii) την εκκεντρότητα .

72. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις :
α) έχει εστίες Ε΄(- 3 , 0) , Ε(3 , 0) και μεγάλο άξονα 10
β) έχει εστίες Ε΄(0 , - 3) , Ε(0 , 3) και μικρό άξονα 8
γ) έχει εστίες Ε΄(- 4 , 0) , Ε(4 , 0) και εκκεντρότητα $\frac{4}{5}$
δ) έχει κέντρο το (0 , 0) , εστιακή απόσταση 12 και εκκεντρότητα $\frac{3}{5}$.

73. Να εξετάσετε αν υπάρχει έλλειψη στην οποία ένα σημείο της Μ να σχηματίζει με τις εστίες Ε΄ και Ε ισόπλευρο τρίγωνο .

74. Ο κύκλος με κέντρο το Ο(0 , 0) και ακτίνα β διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ με α > β . Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης .

75. Έστω ε , ε΄ οι εφαπτόμενες της έλλειψης C : $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ στις κορυφές της Α και Α΄(άκρα του μεγάλου άξονα). Αν Γ , Γ΄ είναι τα σημεία στα οποία μια τρίτη εφαπτόμενη της C τέμνει τις ε , ε΄ αντιστοίχως , να δείξετε ότι : $\Gamma\hat{E}\Gamma' = \Gamma\hat{E'}\Gamma' = 90^o$.

76. Δίνεται η εξίσωση : $9x^2 - 4y^2 = 36$ (1) .

α) Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει υπερβολή .

β) Για την παραπάνω υπερβολή να βρείτε :

i) τις κορυφές , ii) τις εστίες , iii) την εκκεντρότητα , iv) τις ασύμπτωτες .

77. Να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής στις παρακάτω περιπτώσεις :

α) έχει εστίες Ε΄(- 3 , 0) , Ε(3 , 0) και απόσταση κορυφών 4

β) έχει εστίες Ε΄(0 , - 6) , Ε(0 , 6) και εκκεντρότητα 2

γ) έχει εστίες Ε΄(- 4 , 0) , Ε(4 , 0) και ασύμπτωτη την ευθεία y = 5x

δ) έχει κέντρο συμμετρίας το (0 , 0) , εστιακή απόσταση 10 και απόσταση κορυφών 8 .

ε) έχει κέντρο συμμετρίας το (0 , 0) , είναι ισοσκελής και ένα σημείο της είναι το Μ(1 , 4)

στ) έχει κέντρο συμμετρίας το (0 , 0) , ασύμπτωτη την ευθεία $y = -\frac{4}{3}x$ και εστιακή απόσταση 20 .

78. Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ διέρχεται από τις κορυφές υπερβολής με εστίες στον y΄y , της οποίας η μια ασύμπτωτη έχει εξίσωση $y = -\frac{4}{3}x$. Να βρεθούν :

α) οι εστίες της υπερβολής

β) η εστιακή της απόσταση

γ) η εξίσωσή της

δ) η εκκεντρότητά της και

ε) να προσδιοριστεί το ορθογώνιο βάσης της υπερβολής.

79. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες της υπερβολής $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ και την ευθεία y = 2 .

80. Να βρείτε την εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής που έχει τις ίδιες εστίες με την έλλειψη $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$.

81. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της υπερβολής $x^2 - y^2 = 16$, οι οποίες σχηματίζουν γωνία 120^o με τον άξονα x΄x .

82. Δίνεται η υπερβολή C : $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$ και Μ (x_1, y_1) ένα σημείο της διαφορετικό από τις κορυφές της . Αν ε΄ είναι η κάθετη στην εφαπτόμενη ε της C στο Μ και Γ , Δ τα

σημεία τομής της ε΄ με τους άξονες x΄x , y΄y αντίστοιχα τότε :
α) να βρεθεί συναρτήσει των x_1, y_1 η εξίσωση της ε΄
β) να βρεθούν οι συντεταγμένες των Γ και Δ
γ) να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου Ν του ΓΔ
δ) να αποδειχθεί ότι το Ν βρίσκεται μια υπερβολή C_1

ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

83. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο είναι $\left|\vec{AB}\right| = 4$, $\left|\vec{A\Gamma}\right| = 6$ και η γωνία των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$ είναι $\frac{\pi}{3}$. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, τότε:

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{AM}$

β) Να αποδείξετε ότι η προβολή του διανύσματος $\vec{AB}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{AM}$ είναι το διάνυσμα $\frac{14}{19}\vec{AM}$.

84. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ = (1,2) και $\vec{\beta}$ = (2,3)

Α. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

Β. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το $\vec{\gamma}$ με τον άξονα x΄x .

Γ. Να βρείτε τον αριθμό $k \in R$, ώστε το διάνυσμα $\vec{\upsilon} = (k^2 - k, k)$ να είναι κάθετο στο $\vec{\alpha}$.

85. Δίνονται οι παράλληλες ευθείες ε_1: 3x+ 4y +6 = 0 και ε_2: 3x + 4y +16=0.
Α. Να βρείτε την απόσταση των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2.
Β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης ευθείας των ε_1 και ε_2.
Γ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο τομής της ευθείας ε_1 με τον άξονα x΄x και αποκόπτει από την ευθεία ε_2 χορδή μήκους d = $4\sqrt{3}$

86. Τρεις φιλικές οικογένειες κινούμενες με τα αυτοκίνητά τους σε μια άγνωστη γι'αυτούς μεγάλη πόλη χάθηκαν λόγω κυκλοφοριακής συμφόρησης που παρατηρήθηκε. Από τους τουριστικούς χάρτες που είχαν διαπίστωσαν ότι κινούνταν σε τρεις ευθύγραμμους δρόμους με εξισώσεις $(1+\kappa)x + (2-\kappa)\psi = 2(4+\kappa)$ με $\kappa = 1,2,3.$
α)Να δείξετε ότι οι τρεις αυτοί δρόμοι διέρχονται από το ίδιο σημείο Κ.
β)Σε μια χρονική στιγμή διαπίστωσαν ότι και οι τρεις βρίσκονταν σε σημεία που είχαν την ίδια τεταγμένη ψ=6.Ποιες είναι ατή τη στιγμή οι μεταξύ τους αποστάσεις;
γ)Αν τα τρία αυτοκίνητα κινούνται με την ίδια ταχύτητα, ποιο από αυτά θα φτάσει πρώτο στο σημείο συνάντησης;(ως στιγμή 0 θεωρούμε τη χρονική στιγμή του (β) ερωτήματος)

87. **Α.** Θεωρούμε τη συνάρτηση f με f(x)= $x^2 - 4x + 3, \quad x \in \Re$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)+f(y)=0, με x,y $\in \Re$ παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο του Κ και την ακτίνα του ρ.
Β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το κέντρο Κ του παραπάνω κύκλου και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_1 : 2x + y + 5 = 0$

88. Σε αγώνες ταχύτητας αυτοκινήτων τη στιγμή που ένα από τα οχήματα εκινείτο σε στροφή κύκλου εξίσωσης $C:\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\psi-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{2}$ ξέφυγε από το δρόμο κινούμενο κατά την διεύθυνση της εφαπτομένης και έπεσε σε παρακείμενο δέντρο στο σημείο $A\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2}\right)$.

α)Να εξετάσετε αν ο κύκλος C διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
β)Να βρείτε την εξίσωση της ευθύγραμμης τροχιάς που ακολούθησε το αυτοκίνητο όταν ξέφυγε από τη στροφή και προσέκρουσε στο δέντρο Α.
γ)Αν Β είναι το σημείο που ο άξονας ψ΄ψ τέμνει τον κύκλο C,να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΑΒ.

89. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2=2\lambda(3x-y),\ (1)$ όπου $\lambda\in\Re^*$
α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του $\lambda\in\Re^*$ η (1) παριστάνει κύκλο που διέρχεται από το Ο(0, 0), του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β. Να αποδείξετε ότι κάθε κύκλος που ορίζεται από την (1) εφάπτεται της ευθείας $\varepsilon: y=3x$.
γ. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1).
δ. Αν το τμήμα ΟΑ είναι διάμετρος κύκλου που ορίζεται από την (1) και έχει μήκος $2\sqrt{10}$ να βρείτε την εφαπτομένη του κύκλου αυτού στο Α.

90. Δίνεται η εξίσωση $x^2+y^2-2x\eta\mu\theta-2y\sigma\upsilon\nu\theta-3=0(1),\theta\in\Re$
α. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο C για κάθε $\theta\in\Re$ του οποίου να βρείτε το κέντρο Κ και την ακτίνα ρ.
β. Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την (1) ανήκουν σε κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
γ. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x\ \eta\mu\theta+y\ \sigma\upsilon\nu\theta-3=0$ εφάπτεται του κύκλου C για κάθε $\theta\in\Re$.

91. **Α.**Να βρείτε την εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2+y^2=2$ στο σημείο του Α(-1,1).
Β. Δίνεται η εξίσωση: $x^2+y^2-2+\lambda(x-y+2)=0\,(1),\ \lambda\in\Re$
1. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.
2. Για λ = 2, να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση (1).
3. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1),
i. διέρχονται από σταθερό σημείο.
ii. εφάπτονται της ευθείας ε (του ερωτήματος Α).
iii. εφάπτονται μεταξύ τους.

92. Α) Δίνεται η εξίσωση $x^2+(y-1)^2-\mu(x-y)=1+2\mu\ (1)$, όπου $\mu\in R$.
α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του μ η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
β. Να βρείτε εκείνον τον κύκλο που ορίζεται από την (1) και εφάπτεται στον άξονα x'x
Β) Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}=(y-1,1)$ και $\vec{\beta}=(y+1,-4x+1)$.

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων $M(x,y)$ για τα οποία ισχύει:
$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων N(x,y) για τα οποία ισχύει:
$\left|5\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right| = 3\sqrt{2}$.

γ. Αν $C_1 : y^2 = 4x$ και $C_2 : (x+1)^2 + (y-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{8}$ να βρείτε την εφαπτομένη ε της παραβολής C_1 στο Α(1,2) και να αποδείξετε ότι εφάπτεται και στον κύκλο C_2.

93. Έστω ότι η παραβολή C έχει κορυφή την αρχή των αξόνων, άξονα συμμετρίας τον x'x και εστία το σημείο Ε(1, 0).
α.. Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής.
β. Να βρείτε τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της παραβολής C που διέρχονται από το σημείο $M\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$.
γ. Να βρείτε την οξεία γωνία των ευθειών ε_1 και ε_2-

94. Έστω η έλλειψη C που έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων, εστίες στον άξονα x'x, εκκεντρότητα $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και μεγάλο ;άξονα 4.
α. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης.
β. Να βρείτε τις εφαπτόμενες της έλλειψης που διέρχονται από το σημείο Γ(4,0).
γ. Να βρείτε την εφαπτομένη ε της C που διέρχεται από το Γ(4,0) και εφάπτεται του κύκλου $C': x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{13}$.

95. Δίνονται τα σημεία $E'(-\sqrt{3},0)$ και $E(\sqrt{3},0)$ και C ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ για τα οποία ισχύει: (ΜΕ') + (ΜΕ) = 4.
α. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου
β. Αν $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ και το σημείο του Ν(2συνφ, ημφ),
i να βρείτε την εφαπτομένη ε της έλλειψης C στο σημείο Ν.
ii. να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί τη γωνία $E'\hat{N}E$.

96. Θεωρούμε την έλλειψη C : $4x^2 + 9y^2 = 36$.
Α. Να βρείτε την εκκεντρότητα και τις εστίες της έλλειψης.
Β. Έστω Α , Β δύο τυχαία σημεία της C και Μ το μέσο του ΑΒ. Αν ΑΒ$\perp$ζ : y = - x +2 αποδείξτε ότι το Μ βρίσκεται σε ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

97. **Α.** Δίνεται η έλλειψη $C: \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η υπερβολή

$C_1; \frac{x^2}{\alpha} - \frac{y^2}{\beta} = \alpha - \beta,\ \alpha > \beta > 0$ Να δείξετε ότι :

i) Έχουν τις ίδιες εστίες η έλλειψη και η υπερβολή

ii) Αν ε η εκκεντρότητα της C και ε_1 η εκκεντρότητα της C_1 να δείξετε ότι :

$$\varepsilon^2 = \varepsilon_1^{\,2}(2-\varepsilon_1^{\,2})$$

B. Αν $M(x_0, y_0)$ είναι ένα κοινό σημείο τους να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης και της υπερβολής στο Μ είναι καθετες.

98. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (y+1)^2 = 2\lambda(x-y-1)$ (1) με $\lambda \in \Re^*$.

Δ1] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο (C_λ) για κάθε $\lambda \in \Re^*$, του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα R συναρτήσει του λ.

Δ2] Αν $\lambda = -1$ να αποδείξετε ότι ο κύκλος (C_λ) εφάπτεται στην ευθεία

$$(\varepsilon) : x - y + 3 = 0$$

Δ3] Αν ο κύκλος του ερωτήματος Δ2 τέμνει τον άξονα yy' στα σημεία Α και Β να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΒ είναι ορθογώνιο.

99. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων xOy δίνονται τα σημεία $A(2,0)$ και $B(0,4)$.

Γ1] Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της μεσοκαθέτου (δ) του τμήματος ΑΒ είναι :

$$(\delta) : x - 2y + 3 = 0$$

Γ2] Να βρεθεί το σημείο Κ της μεσοκαθέτου (δ) του ΑΒ που απέχει από την αρχή των αξόνων την ελάχιστη απόσταση και η ελάχιστη αυτή απόσταση .

Γ3] Να βρείτε το σύνολο των σημείων Μ για τα οποία ισχύει (ΜΑΒ)=4 .

100. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Β1] Να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}.\vec{\beta} = 1$ και $\left(\vec{\alpha} - \sqrt{2}.\vec{\beta}\right) \perp \left(\vec{\alpha} + \sqrt{2}.\vec{\beta}\right)$.

Β2] Να αποδείξετε ότι : $\left|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}\right| = \sqrt{5}$.

Β3] Να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\vec{\alpha}, 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}}\right) = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$.